Nagy András

Feladatok a logaritmus témaköréhez
11. osztály

2010.

Feladatok a logaritmus témaköréhez – 11. osztály

1) Írd fel a következő egyenlőségeket hatványalakban!
   a) $\log_3 9 = 2$;
   b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$;
   c) $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$;
   d) $\lg 10 = 1$;
   e) $\lg \frac{1}{10} = -1$;
   f) $\log_5 0{,}04 = -2$;
   g) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$;
   h) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} = -2$.

2) Írd fel a következő egyenlőségeket logaritmus segítségével!
   a) $7^2 = 49$;
   b) $3^5 = 243$;
   c) $2^{-3} = \frac{1}{8}$;
   d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$;
   e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 64$;
   f) $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$;
   g) $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$;
   h) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}125$.

3) Számítsd ki a következő kifejezések értékét!
   a) $\lg 1000$;
   b) $\lg \sqrt{100}$;
   c) $\log_5 1$;
   d) $\log_1 3$;
   e) $\log_2 (-4)$;
   f) $\log_{\frac{1}{7}} 49$;
   g) $\log_3 0$;
   h) $\log_{\sqrt{2}} 2$.

4) Oldd meg az egyenleteket!

a) $\log_2 a = 4$;
b) $\lg b = -3$;
c) $\log_{\frac{1}{3}} c = 2$;
d) $\log_{\sqrt{7}} d = 4$;
e) $\log_{\frac{2}{3}} e = -1$;
f) $\log_{0,2} f = -1$;
g) $\log_3 g = \frac{2}{3}$;
h) $\log_5 h = -\frac{1}{2}$.

5) Határozd meg a logaritmus alapját!

a) $\log_a 27 = 3$;
b) $\log_b \frac{1}{4} = 2$;
c) $\log_c \sqrt{7} = -1$;
d) $\log_d 5 = \frac{1}{2}$;
e) $\log_e 0,25 = 2$;
f) $\log_f 3 = 0$;
g) $\log_g 2 = \frac{2}{3}$;
h) $\log_h \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$.

6) Számítsd ki a következő kifejezések számértékét!

a) $2^{\log_2 4}$;
b) $10^{\lg 8}$;
c) $5^{\log_5(-5)}$;
d) $\left(\frac{4}{7}\right)^{\log_{\frac{4}{7}} 5}$;
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3}$;
f) $3^{2 \cdot \log_3 5}$;
g) $9^{\log_3 2}$;
h) $7^{\log_{49} 3}$.

7) Határozd meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\log_2 (2x - 7)$;
b) $\lg (2x + 6) + \lg (5 - x)$;
c) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5-3x}$;
d) $\log_5 |5-2x|$;

e) $\lg (x-4)^2$;
f) $\log_2 \frac{3}{2x-7}$;
g) $\log_7 (x^2 - 8x + 12)$;
h) $\lg \frac{x^2-4}{1-x}$.

8) Ábrázold és jellemezd a következő függvényeket!
a) $f(x) = \log_3 x$;
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$;
c) $f(x) = \log_2 (x + 3)$;
d) $f(x) = 2\cdot\log_3 x$;
e) $f(x) = -\log_2 (x + 1)$;
f) $f(x) = \log_3 (2x)$;
g) $f(x) = 2\cdot\log_3 (x + 2) + 3$;
h) $f(x) = \log_2 (x-1) - 2$, ha $x\in [-1;9]$.

9) Melyik nagyobb?
a) $\log_3 13$ vagy $\log_3 16$;
b) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ vagy $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$;
c) $\log_{0,2} 4$ vagy $\log_{0,2} 5$;
d) $\log_7 \frac{3}{4}$ vagy $\log_7 \frac{3}{5}$;
e) $\log_{\frac{4}{11}} \frac{13}{6}$ vagy $\log_{\frac{4}{11}} \frac{19}{9}$;
f) $\log_3 2$ vagy $\log_2 3$.

10) Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket a valós számok halmazán!
a) $\log_3 x = 2$;
b) $\log_2 x = -x + 3$;
c) $\log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2} x + \frac{1}{2}$;
d) $\log_3 x + 1 = \sqrt{x}$;
e) $\log_4 x = x^2 + 1$;
f) $\log_2 (x + 3) = |x-1|-1$;
g) $2\cdot\log_{\frac{1}{2}} x = x - 1$;
h) $\log_3 x = \log_{\frac{1}{2}} (x-2) + 1$.

11) Írd fel a következő kifejezések logaritmusát, a benne szereplő változók és számok logaritmusainak segítségével!
a) $x = 5bc$;
b) $x = a^2b$;

c) $x = \dfrac{3ab}{2}$;

d) $x = \dfrac{abc}{4T}$;

e) $x = \dfrac{a^2 - ab}{2bc}$;

f) $x = \dfrac{4r^3\pi}{3}$;

g) $x = a\sqrt[3]{b}$;

h) $x = \dfrac{\sqrt[5]{a}}{b^3}$.

12) Fejezd ki x értékét!

a) $\lg x = \lg 2{,}4 + \lg 15$;
b) $\lg x = \lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \lg 4 + \lg 5$;
c) $\lg x = 2\cdot\lg 12 - \lg 18$;
d) $\lg x = -2\cdot\lg 7 + 3\cdot\lg 2$;
e) $\lg x = \dfrac{1}{2}\cdot\lg 20 - \dfrac{1}{2}\cdot\lg 5$;
f) $\lg x = \dfrac{3}{2}\cdot\lg 9 - \lg 3 - \dfrac{1}{2}\cdot\lg 81$;
g) $\lg x = \dfrac{2}{3}\cdot\lg 8 - \dfrac{1}{3}\cdot\lg 27 + 2\cdot\lg 5$;
h) $\lg x = \dfrac{1}{2}\cdot\lg 12 + \lg 4 - \dfrac{1}{2}\cdot\lg 4 + \dfrac{1}{2}\cdot\lg 3$.

13) Fejezd ki x-et a és b segítségével!

a) $\lg x = \lg a + \lg b$;
b) $\lg x = \lg a + \lg b - \lg c$;
c) $\lg x = \lg a - \lg b - \lg c - \lg d$;
d) $\lg x = 2\cdot\lg a + 3\cdot\lg b$;
e) $\lg x = \dfrac{1}{3}\cdot\lg a + \dfrac{1}{2}\cdot\lg b$;
f) $\lg x = 0{,}5\cdot\lg a - \dfrac{3}{2}\cdot\lg b$;
g) $\lg x = \dfrac{2}{3}\cdot(\lg a - \lg b)$;
h) $\lg x = \lg (a - b)$.

14) Határozd meg a következő kifejezések számértékét!

a) $\lg 25 + \lg 4$;
b) $\log_7 21 - \log_7 3$;
c) $2\cdot\log_6 2 + \log_6 27 - \log_6 3$;
d) $3\cdot\log_7 7 + 3\cdot\log_3 27$;
e) $\lg\sqrt{676} + \lg\sqrt{25} - \lg 13$;
f) $2\cdot\lg 2 + 6\cdot\lg\sqrt{5} + \lg 18 - 2\cdot\lg 3$;

g) $\log_{\sqrt{12}} 4 + \log_{\sqrt{12}} 3 - \log_{\sqrt{12}} 9 - \log_{\sqrt{12}} 16 + 2\cdot\log_{\sqrt{12}} 12$;
h) $\log_3 27 \cdot \log_2 1024$.

15) Határozd meg a következő hatványok számértékét!
a) $10^{-\lg 5}$;
b) $3^{3+\log_3 2}$;
c) $10^{1-\lg 5}$;
d) $100^{1-\lg\frac{5}{2}}$;
e) $3^{\log_3 2+\log_3 1}$;
f) $5^{\log_5 14-\log_5 7}$;
g) $0{,}25^{\log_2 3-\log_2 4}$;
h) $11^{\log_{\sqrt{11}} 2+\log_{121} 2}$.

16) Oldd meg az alábbi egyenleteket!
a) $\lg x = \lg 23$;
b) $\log_3 (x + 2) = \log_3 (3x - 1)$;
c) $\log_{\sqrt{2}} x^2 = \log_{\sqrt{2}} (10x - 24)$;
d) $\dfrac{\log_2(x+3)}{\log_2(2x+3)} = 1$;
e) $\log_{\frac{1}{3}} x^2 = 2\cdot\log_{\frac{1}{3}} x$;
f) $\dfrac{\lg(5-x)}{\lg(x-1)} = 2$;
g) $\log_3 \sqrt{x+1} = \log_3 (x + 3)$;
h) $\lg|x+1| = \lg (2x + 3)$.

17) Oldd meg az alábbi egyenleteket!
a) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$;
b) $\log_7 (x - 4) = 3$;
c) $\log_9 |5-3x| = \dfrac{1}{2}$;
d) $\log_2 (2x + 3) = -1$;
e) $\log_3 (x^2 - 6x + 8) = 1$;
f) $\log_{81} \sqrt{5-3x} = -\dfrac{1}{2}$;
g) $\log_{x+1} (2x + 8) = 2$;
h) $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$.

18) Oldd meg az alábbi egyenleteket!
a) $\lg x = \lg 2 + \lg 6$;
b) $2 - \log_3 x = \log_3 2 + \log_3 4 + \log_3 5$;
c) $\log_7 (x - 5) + 2 = \log_7 (3 - x) - \log_7 x$;
d) $\log_{11} (x - 1) + \log_{11} (x + 1) = \log_{11} (x - 2) + \log_{11} 8$;
e) $\lg (x - 4) + \lg (x + 3) = \lg (5x + 4)$;

f) $2\cdot\log_5 (2x + 1) = \frac{1}{2}\cdot\log_5 (x^2 + 8x + 16)$;

g) $\lg\sqrt{5x-8} + \frac{1}{2}\cdot\lg (2x + 3) = \frac{1}{2}\cdot\lg 36$;

h) $\frac{\log_2 1}{\log_2 (x+3)} = \log_2 (x - 7)$.

19) Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $\log_2 x + \log_4 x = 3$;

b) $\log_5 (x + 1) + \log_{25} (x + 1) = 1{,}5$;

c) $\log_3 x - \log_{\sqrt{3}} x = 1$;

d) $\log_{\frac{1}{8}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 3$;

e) $\log_5 (x - 3) + \log_{25} (x - 3) + \log_{625} (x - 3) = 7$;

f) $\log_9 (2x + 1) - \log_{27} (2x + 1) = 1$;

g) $\log_x 3 + \log_3 x = 2$.

20) Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\log_7 (x + 3) > \log_7 (2x + 1)$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} (2x - 5) \geq \log_{\frac{1}{2}} (6 - x)$;

c) $\log_3 (7 + x) + \log_3 (x - 3) \leq \log_3 (2x + 3)$;

d) $\log_{27} (7x - 1) < \frac{1}{3}$;

e) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3-x}{2x+1} < 0$.

21) Oldd meg az alábbi feladatokat!

a) Egy bankba 200000 forintot helyezünk el 6%-os éves kamatra. Változatlan kamat mellett legalább hány év telik el, mire 350000 forintunk lesz?

b) Egy fénymásoló beszerzési ára 140000 forint. A gép értéke 10%-kal csökken évente. A gép értéke hány év múlva éri az új árának csupán 60 %-át?

Megoldások

1)

a. $3^2 = 9$;

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$;

c. $27^{\frac{1}{3}} = 3$;

d. $10^1 = 10$;

e. $10^{-1} = \frac{1}{10}$;

f. $5^{-2} = 0{,}04 = \frac{1}{25}$;

g. $27^{\frac{2}{3}} = 9$;

h. $\left(\sqrt{3}\right)^{-2} = \frac{1}{3}$.

2)

a. $\log_7 49 = 2$;

b. $\log_3 243 = 5$;

c. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$;

d. $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} = 2$;

e. $\log_{\frac{1}{4}} 64 = -3$;

f. $\log_3 \sqrt[3]{9} = \frac{2}{3}$;

g. $\log_{27} \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$;

h. $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}125 = 3 \left(0{,}125 = \frac{1}{8}\right)$.

3)

a. $\lg 1000 = 3$, mert $10^3 = 1000$;

b. $\lg \sqrt{100} = 1$, mert $10^1 = \sqrt{100} = 10$;

c. $\log_5 1 = 0$, mert $5^0 = 1$;

d. $\log_1 3$ nem értelmezhető, mert $1^x = 1$ ($x \in \mathbb{R}$);

e. $\log_2 (-4)$ nem értelmezhető, mert $2^x > 0$ ($x \in \mathbb{R}$);

f. $\log_{\frac{1}{7}} 49 = -2$, mert $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = 49$;

g. $\log_3 0$ nem értelmezhető, mert $3^x > 0$ ($x \in \mathbb{R}$);

h. $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$, mert $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

4)

a. $a = 2^4 = 16$;

b. $b = 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$;

c. $c = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$;

d. $d = \sqrt{7}^4 = 49$;

e. $e = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$;

f. $f = 0{,}2^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$;

g. $g = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$;

h. $h = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5)

a. $a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$;

b. $b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$;

c. $c^{-1} = \sqrt{7} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{7}}$;

d. $d^{\frac{1}{2}} = 5 \Rightarrow d = 25$;

e. $e^2 = 0{,}25 \Rightarrow e = \frac{1}{2}$;

f. nem értelmezhető, mert $f^0 = 1 \neq 3$ ($f \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$);

g. $g^{\frac{2}{3}} = 2 \Rightarrow g = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$;

h. $h^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \Rightarrow h = \frac{4}{25}$.

6)

a. $2^{\log_2 4} = 4$;

b. $10^{\lg 8} = 8$;

c. $5^{\log_5(-5)}$ nem értelmezhető, mert a logaritmus csak pozitív számokra értelmezett;

d. $\left(\frac{4}{7}\right)^{\log_{\frac{4}{7}} 5} = 5$;

e. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3} = \left(2^{-1}\right)^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$;

f. $3^{2\cdot\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^2 = 5^2 = 25$;

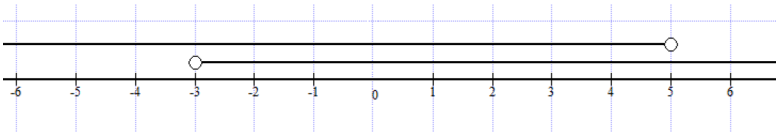
g. $9^{\log_3 2} = \left(3^2\right)^{\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^2 = 2^2 = 4$;

h. $7^{\log_{49}3} = \left(49^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{49}3} = \left(49^{\log_{49}3}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

7)

a. $(2x-7) > 0 \Rightarrow x > \frac{7}{2}$, azaz: É.T.: $x \in \left]\frac{7}{2};\infty\right[$;

b. $(2x+6) > 0 \Rightarrow -3 < x$ és $(5-x) > 0 \Rightarrow x < 5$, azaz: É.T.: $x \in]-3;5[$;



c. $\sqrt{5-3x} > 0 \Rightarrow x < \frac{5}{3}$, azaz: É.T.: $x \in \left]-\infty;\frac{5}{3}\right[$;

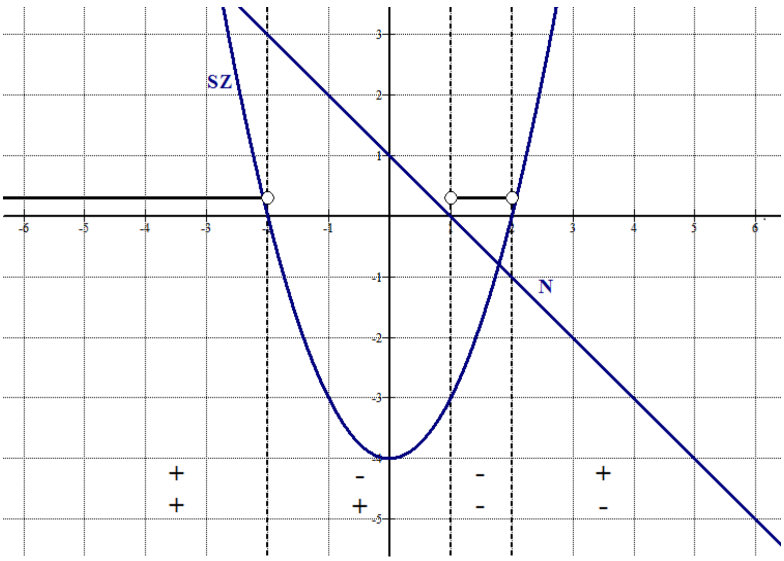
d. $|5-2x| > 0 \Rightarrow x \neq \frac{5}{2}$, azaz: É.T.: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$;

e. $(x-4)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 4$, azaz: É.T.: $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$;

f. $\frac{3}{2x-7} > 0 \Rightarrow 2x-7 > 0 \Rightarrow \frac{7}{2} < x$, azaz: É.T.: $x \in \left]\frac{7}{2};\infty\right[$;

g. $x^2 - 8x + 12 > 0 \Rightarrow x < 2$ vagy $6 < x$, azaz: É.T.: $x \in]-\infty;2[\cup]6;\infty[$;

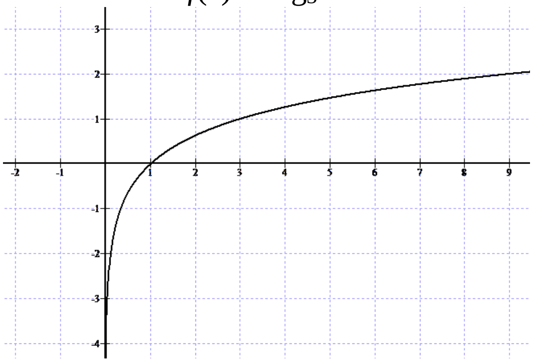
h. $\frac{x^2-4}{1-x} > 0 \Rightarrow$ 1. eset: $x^2 - 4 > 0$ és $1 - x > 0 \Rightarrow -2 < x$.



2. eset: $x^2 - 4 < 0$ és $1 - x < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$.
Így: É.T.: $x \in]-\infty;-2[\cup]1;2[$.

8)

a. $f(x) = \log_3 x$



É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$

Zérushely: $x = 1$

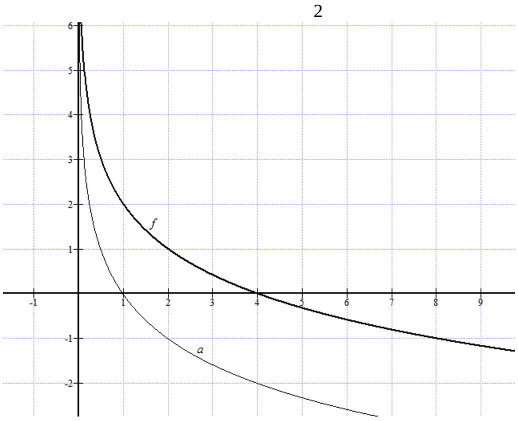
Szélsőérték: nincs

É.K.: $y \in \mathbb{R}$

Monotonitás: szig. monoton növő

Paritás: nem páros, nem páratlan

b. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$



Transzformációs lépések:

$a(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, az alapfüggvény ábrázolása

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$, a grafikonjának eltolása +2 egységgel az y tengely mentén $\underline{\mathbf{v}}(0;2)$

É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$

Zérushely: $x = 4$

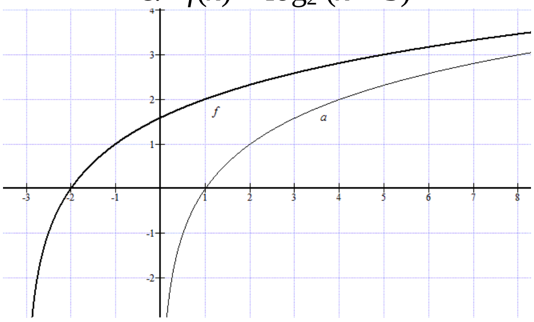
Szélsőérték: nincs

É.K.: $y \in \mathbb{R}$

Monotonitás: szig. monoton csökkenő

Paritás: nem páros, nem páratlan

c. $f(x) = \log_2 (x + 3)$



Transzformációs lépések:

$a(x) = \log_2 x$, az alapfüggvény ábrázolása

$f(x) = \log_2 (x + 3)$, a grafikonjának eltolása -3 egységgel az x tengely mentén $\underline{\mathbf{v}}(-3;0)$

É.T.: $x \in]-3;\infty[$

Zérushely: $x = -2$

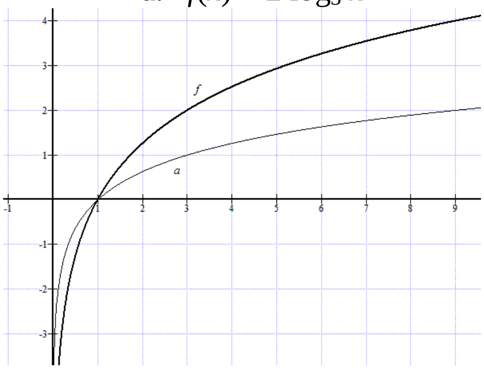
Szélsőérték: nincs

É.K.: $y \in \mathbb{R}$

Monotonitás: szig. monoton növő

Paritás: nem páros, nem páratlan

d. $f(x) = 2 \cdot \log_3 x$

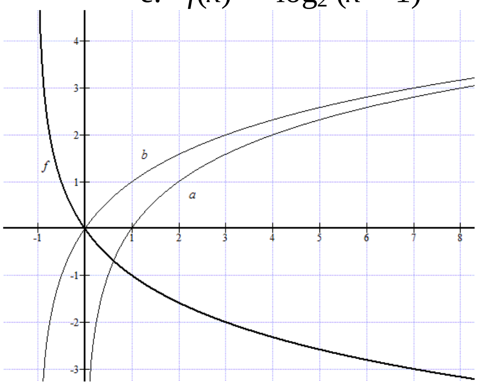


Transzformációs lépések:
$a(x) = \log_3 x$, az alapfüggvény ábrázolása
$f(x) = 2 \cdot \log_3$, a grafikonjának kétszeres nyújtása az y tengely mentén

É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$
Zérushely: $x = 1$
Szélsőérték: nincs

É.K.: $y \in \mathbb{R}$
Monotonitás: szig. monoton növő
Paritás: nem páros, nem páratlan

e. $f(x) = -\log_2 (x + 1)$

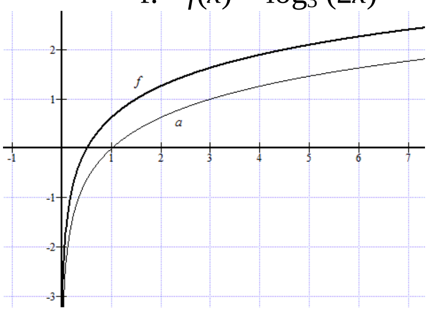


Transzformációs lépések:
$a(x) = \log_2 x$, az alapfüggvény ábrázolása
$b(x) = \log_2 (x + 1)$, a grafikonjának eltolása -1 egységgel az x tengely mentén
$\underline{\boldsymbol{v}}(-1;0)$
$f(x) = -\log_2 (x + 1)$, b grafikonjának tükrözése az x tengelyre

É.T.: $x \in]-1;\infty[$
Zérushely: $x = 0$
Szélsőérték: nincs

É.K.: $y \in \mathbb{R}$
Monotonitás: szig. monoton csökkenő
Paritás: nem páros, nem páratlan

f. $f(x) = \log_3 (2x)$



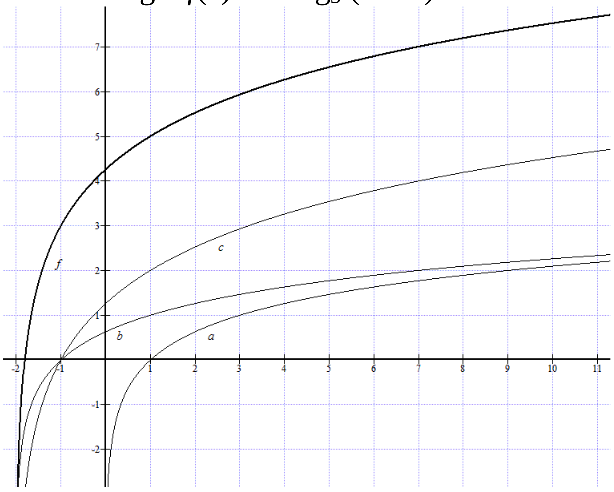
Transzformációs lépések:
$a(x) = \log_3 x$, az alapfüggvény ábrázolása
$f(x) = \log_3 (2x)$, a grafikonjának $\frac{1}{2}$-szeres zsugorítása az x tengely mentén

É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$
Zérushely: $x = \frac{1}{2}$
Szélsőérték: nincs

É.K.: $y \in \mathbb{R}$
Monotonitás: szig. monoton növő

Paritás: nem páros, nem páratlan

g. $f(x) = 2 \cdot \log_3 (x + 2) + 3$



Transzformációs lépések:

$a(x) = \log_3 x$, az alapfüggvény ábrázolása

$b(x) = \log_3 (x + 2)$, *a* grafikon eltolása -2 egységgel az *x* tengely mentén $\underline{\mathbf{v}}(-2;0)$

$c(x) = 2 \cdot \log_3 (x + 2)$, *b* grafikonjának kétszeres nyújtása az *y* tengely mentén

$f(x) = 2 \cdot \log_3 (x + 2) + 3$, *c* grafikonjának eltolása az *y* tengely mentén +3 egységgel $\underline{\mathbf{v}}(0;3)$

É.T.: $x \in \,]-2;\infty[$

Zérushely: $x \approx -1{,}8$

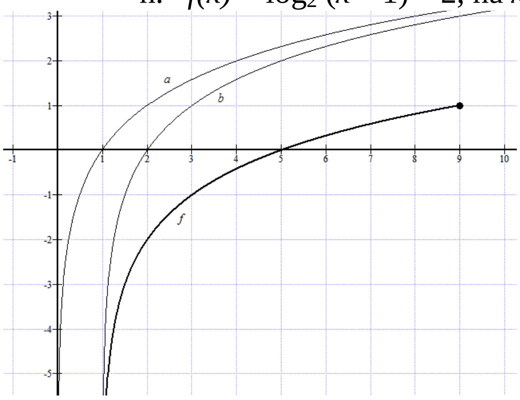
Szélsőérték: nincs

É.K.: $y \in \mathbb{R}$

Monotonitás: szig. monoton növő

Paritás: nem páros, nem páratlan

h. $f(x) = \log_2 (x - 1) - 2$, ha $x \in [-1;9]$



Transzformációs lépések:

$a(x) = \log_2 x$, az alapfüggvény ábrázolása

$b(x) = \log_2 (x - 1)$, *a* grafikonjának eltolása 1 egységgel az *x* tengely mentén $\underline{\mathbf{v}}(1;0)$

$f(x) = \log_2 (x - 1) - 2$, *b* grafikonjának eltolása -2 egységgel az *y* tengely mentén $\underline{\mathbf{v}}(0;-2)$

É.T.: $x \in \,]1;9]$

Zérushely: $x = 5$

Szélsőérték: minimum nincs
maximum hely: $x = 9$
maximum érték: $y = 1$

É.K.: $y \in \,]-\infty;1]$

Monotonitás: szig. monoton növő

Paritás: nem páros, nem páratlan

9)

a. A logaritmus alapja nagyobb mint 1, tehát a függvény szig. monoton növő.
$13 < 16 \Rightarrow \log_3 13 < \log_3 16$;

b. A logaritmus alapja 0 és 1 közti, tehát a függvény szig. monoton csökkenő.
$3 > \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$;

c. A logaritmus alapja 0 és 1 közti, tehát a függvény szig. monoton csökkenő.
$4 < 5 \Rightarrow \log_{0,2} 4 > \log_{0,2} 5$;

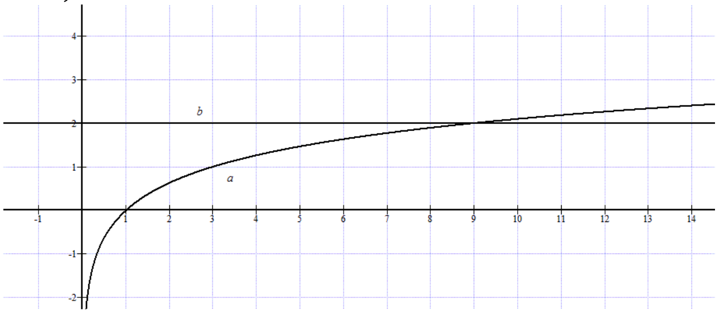
d. A logaritmus alapja nagyobb mint 1, tehát a függvény szig. monoton növő.
$\frac{3}{4} > \frac{3}{5} \Rightarrow \log_7 \frac{3}{4} > \log_7 \frac{3}{5}$;

e. A logaritmus alapja 0 és 1 közti, tehát a függvény szig. monoton csökkenő.
$\frac{13}{6} > \frac{19}{9} \Rightarrow \log_{\frac{4}{11}} \frac{13}{6} < \log_{\frac{4}{11}} \frac{19}{9}$;

f. $\log_3 2 < 1$ és $\log_2 3 > 1 \Rightarrow \log_3 2 < \log_2 3$.

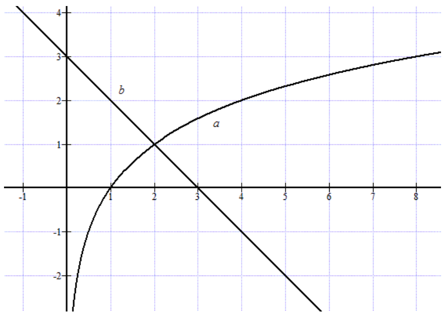
10) Az egyenletek bal oldalából képezzük az $a(x)$ függvényt, jobb oldalából a $b(x)$ függvényt, majd ábrázoljuk grafikonjukat közös koordináta-rendszerben.

a. $\log_3 x = 2$;



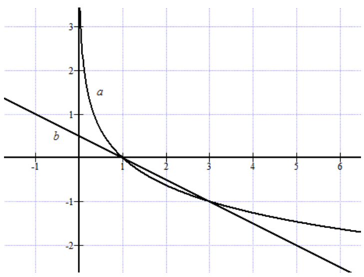
Az ábráról leolvasható megoldás: $x = 9$, más megoldás nincs.

b. $\log_2 x = -x + 3$;



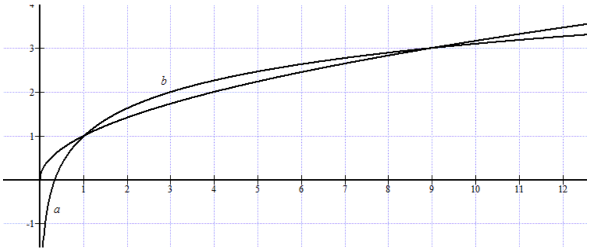
Az ábráról leolvasható megoldás: $x = 2$, más megoldás nincs.

c. $\log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;



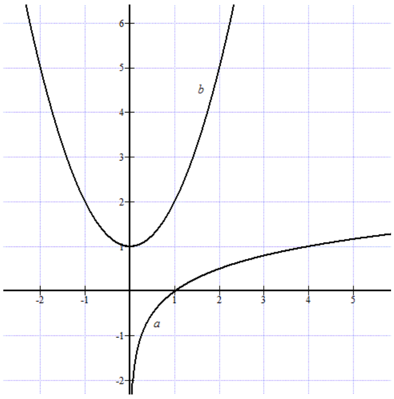
Az ábráról leolvasható megoldások: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, más megoldás nincs.

d. $\log_3 x + 1 = \sqrt{x}$;



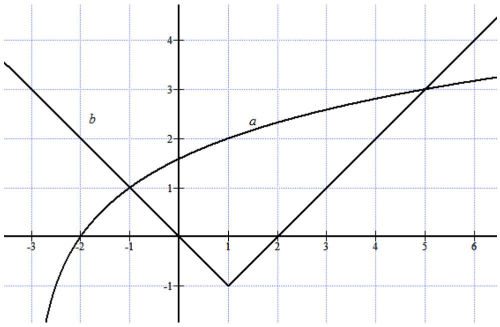
Az ábráról leolvasható megoldások: $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, más megoldás nincs.

e. $\log_4 x = x^2 + 1$;



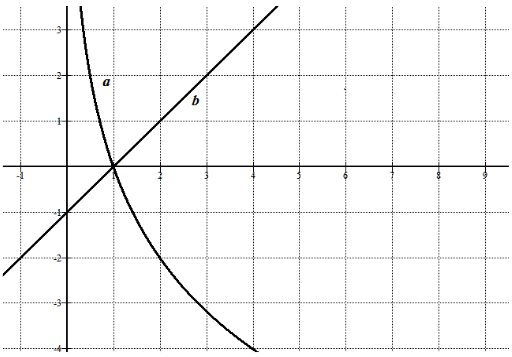
A grafikonoknak nincs közös pontja, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

f. $\log_2 (x + 3) = |x-1|-1$;



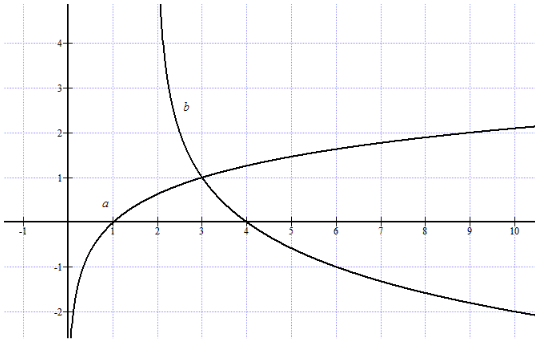
Az ábráról leolvasható megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, más megoldás nincs.

g. $2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} x = x - 1$;



Az ábráról leolvasható megoldás: $x = 1$, más megoldás nincs.

h. $\log_3 x = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + 1$.



Az ábráról leolvasható megoldás: $x = 3$, más megoldás nincs.

11) A kifejezésekben a változók pozitív valós számok, és a logaritmus alapja $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

a. $\log_k x = \log_k 5 + \log_k b + \log_k c$;
b. $\log_k x = 2 \cdot \log_k a + \log_k b$;
c. $\log_k x = \log_k 3 + \log_k a + \log_k b - \log_k 2$;
d. $\log_k x = \log_k a + \log_k b + \log_k c - \log_k 4 - \log_k T$;
e. $\dfrac{a^2 - ab}{2bc} = \dfrac{a(a-b)}{2bc}$, $\log_k x = \log_k a + \log_k (a-b) - \log_k 2 - \log_k b - \log_k c$;
f. $\log_k x = \log_k 4 + 3 \cdot \log_k r + \log_k \pi - \log_k 3$;
g. $\log_k x = \log_k a + \dfrac{1}{3} \cdot \log_k b$;
h. $\log_k x = \dfrac{1}{5} \cdot \log_k a - 3 \cdot \log_k b$.

12)

a. $\lg x = \lg (2{,}4 \cdot 15) = \lg 36 \Rightarrow x = 36$;
b. $\lg x = \lg (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = \lg 5! = \lg 120 \Rightarrow x = 120$;
c. $\lg x = \lg \dfrac{12^2}{18} = \lg \dfrac{144}{18} = \lg 8 \Rightarrow x = 8$;
d. $\lg x = \lg (7^{-2} \cdot 2^3) = \lg \dfrac{8}{49} \Rightarrow x = \dfrac{8}{49}$;
e. $\lg x = \lg \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \lg \sqrt{\dfrac{20}{5}} = \lg \sqrt{4} = \lg 2 \Rightarrow x = 2$;
f. $\lg x = \lg \dfrac{\sqrt{9^3}}{3 \cdot \sqrt{81}} = \lg \dfrac{27}{3 \cdot 9} = \lg 1 \Rightarrow x = 1$;
g. $\lg x = \lg \dfrac{\sqrt[3]{8^2} \cdot 5^2}{\sqrt[3]{27}} = \lg \dfrac{4 \cdot 25}{3} \Rightarrow x = \dfrac{100}{3}$;
h. $\lg x = \lg \dfrac{\sqrt{12} \cdot 4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \lg \dfrac{\sqrt{36} \cdot 4}{2} = \lg 12 \Rightarrow x = 12$.

13) A kifejezésekben a változók pozitív valós számok,

a. $\lg x = \lg ab \Rightarrow x = ab$;
b. $\lg x = \lg \dfrac{ab}{c} \Rightarrow x = \dfrac{ab}{c}$;

c. $\lg x = \lg \frac{a}{bcd} \Rightarrow x = \frac{a}{bcd}$;

d. $\lg x = \lg a^2b^3 \Rightarrow x = a^2b^3$;

e. $\lg x = \lg \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b} \Rightarrow x = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b}$ (= $\sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{a^2 \cdot b^3}$);

f. $\lg x = \lg \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^3}} = \lg \sqrt{\frac{a}{b^3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a}{b^3}}$;

g. $\lg x = \frac{2}{3} \cdot \lg a - \frac{2}{3} \cdot \lg b = \lg \sqrt[3]{a^2} - \lg \sqrt[3]{b^2} = \lg \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2}} = \lg \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$;

h. $\lg x = \lg (a - b) \Rightarrow x = a - b$, $(a > b)$.

14)

a. $\lg 25 + \lg 4 = \lg 100 = 2$;

b. $\log_7 21 - \log_7 3 = \log_7 \frac{21}{3} = \log_7 7 = 1$;

c. $2 \cdot \log_6 2 + \log_6 27 - \log_6 3 = \log_6 \frac{2^2 \cdot 27}{3} = \log_6 36 = 2$;

d. $3 \cdot \log_7 7 + 3 \cdot \log_3 27 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 12$;

e. $\lg \sqrt{676} + \lg \sqrt{25} - \lg 13 = \lg \frac{\sqrt{676} \cdot \sqrt{25}}{13} = \lg \frac{\sqrt{16900}}{13} = \lg 10 = 1$;

f. $2 \cdot \lg 2 + 6 \cdot \lg \sqrt{5} + \lg 18 - 2 \cdot \lg 3 = \lg \frac{2^2 \cdot \sqrt{5}^6 \cdot 18}{3^2} = \lg \frac{4 \cdot 125 \cdot 18}{9} =$

$= \lg 1000 = 3$;

g. $\log_{\sqrt{12}} 4 + \log_{\sqrt{12}} 3 - \log_{\sqrt{12}} 9 - \log_{\sqrt{12}} 16 + 2 \cdot \log_{\sqrt{12}} 12 = \log_{\sqrt{12}} \frac{4 \cdot 3 \cdot 12^2}{9 \cdot 16} =$

$= \log_{\sqrt{12}} \frac{1728}{144} = \log_{\sqrt{12}} 12 = 2$;

h. $\log_3 27 \cdot \log_2 1024 = 3 \cdot 10 = 30$.

15)

a. $10^{-\lg 5} = \left(10^{\lg 5}\right)^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$;

b. $3^{3+\log_3 2} = 3^3 \cdot 3^{\log_3 2} = 27 \cdot 2 = 54$;

c. $10^{1-\lg 5} = \frac{10^1}{10^{\lg 5}} = \frac{10}{5} = 2$; vagy $10^{1-\lg 5} = 10^{\lg 10 - \lg 5} = 10^{\lg \frac{10}{5}} = 10^{\lg 2} = 2$;

d. $100^{1-\lg\frac{5}{2}} = \frac{100^1}{100^{\lg\frac{5}{2}}} = \frac{100}{\left(10^{\lg\frac{5}{2}}\right)^2} = \frac{100}{\frac{25}{4}} = 16$;

e. $3^{\log_3 2 + \log_3 1} = 3^{\log_3 2} \cdot 3^{\log_3 1} = 2 \cdot 1 = 2$; vagy $3^{\log_3 2 \cdot 1} = 3^{\log_3 2} = 2$;

f. $5^{\log_5 14 - \log_5 7} = \frac{5^{\log_5 14}}{5^{\log_5 7}} = \frac{14}{7} = 2$; vagy $5^{\log_5 \frac{14}{7}} = \frac{14}{7} = 2$;

g. $0{,}25^{\log_2 3-\log_2 4}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 3-\log_2 4} = \left(2^{-2}\right)^{\log_2 3-\log_2 4} = \left(2^{\log_2 3-\log_2 4}\right)^{-2} = \left(2^{\log_2 \frac{3}{4}}\right)^{-2} =$

$=\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{9}$;

h. $11^{\log_{\sqrt{11}} 2+\log_{121} 2} = \left(\sqrt{11}^2\right)^{\log_{\sqrt{11}} 2}\cdot\left(121^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{121} 2} = \left(\sqrt{11}^{\log_{\sqrt{11}} 2}\right)^2\cdot\left(121^{\log_{121} 2}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= 2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32}$.

16)

a. $0 < x \Rightarrow$ É.T.: $x\in \mathbb{R}^+$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x = 23$.
$x = 23\in$ É.T., más megoldás nincs;

b. $x + 2 > 0 \Rightarrow -2 < x$ és $3x - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < x \Rightarrow$ É.T.: $x\in \left]\frac{1}{3};\infty\right[$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x + 2 = 3x - 1$.
Az egyenlet megoldása $x = \frac{3}{2} \in$ É.T., más megoldás nincs;

c. $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$ és $10x - 24 > 0 \Rightarrow 2{,}4 < x \Rightarrow$ É.T.: $x\in\ ]2{,}4;\infty[$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x^2 = 10x - 24$.
Az egyenlet megoldása $x_1 = 4$ és $x_2 = 6$, mindkét gyök eleme az értelmezési tartománynak, azaz megoldása az egyenletnek;

d. $x + 3 > 0 \Rightarrow -3 < x$ és $2x + 3 > 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} < x$ és $\log_2 (2x + 3) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ É.T.: $x\in \left]-\frac{3}{2};-1\right[\cup]-1;\infty[$ (másképp: $x\in \left]-\frac{3}{2};\infty\right[\setminus\{-1\}$).

$\frac{\log_2(x+3)}{\log_2(2x+3)} = 1 \Rightarrow \log_2 (x + 3) = \log_2 (2x + 3)$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x + 3 = 2x + 3$.
Az egyenlet megoldása $x = 0 \in$ É.T., más megoldás nincs;

e. $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$ és $x > 0 \Rightarrow$ É.T.: $x\in \mathbb{R}^+$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x^2 = x^2$.
Az egyenlet azonosság, megoldása $x\in \mathbb{R}^+$;

f. $5 - x > 0 \Rightarrow x < 5$ és $x - 1 > 0 \Rightarrow 1 < x$ és $\lg (x - 1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ É.T.: $x\in\ ]1;2[\cup]2;5[$, (másképp: $x\in\ ]1;5[\setminus\{2\}$).

$\frac{\lg(5-x)}{\lg(x-1)} = 2 \Rightarrow \lg (5 - x) = \lg (x - 1)^2$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $5 - x = (x - 1)^2$.
Az egyenlet megoldása $x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \notin$ É.T. és $x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \in$ É.T., tehát a feladat megoldása $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$;

g. $\sqrt{x+1} > 0 \Rightarrow$ -1 < x és $x + 3 > 0 \Rightarrow -3 < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]-1;\infty\right[$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $\sqrt{x+1} = (x + 3)$.
Az egyenletnek nincs megoldása;

h. $|x+1| > 0 \Rightarrow x \neq -1$ és $2x + 3 > 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} < x \Rightarrow$
$\Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]-\frac{3}{2};-1\right[\cup \left]-1;\infty\right[$, (másképp: $x \in \left]-\frac{3}{2};\infty\right[\setminus \{-1\}$)
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $|x+1| = 2x + 3$.
Az egyenlet megoldása $x = -\frac{4}{3} \in$ É.T., más megoldás nincs.

17)

a. $0 < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$.
$\log_{\frac{1}{2}} x = 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x = \frac{1}{4}$.
$x = \frac{1}{4} \in$ É.T., más megoldás nincs;

b. $x - 4 > 0 \Rightarrow 4 < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]4;\infty\right[$.
$\log_7 (x - 4) = 3 \Rightarrow \log_7 (x - 4) = \log_7 7^3$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x - 4 = 343$.
Az egyenlet megoldása $x = 347 \in$ É.T., más megoldás nincs;

c. $|5-3x| > 0 \Rightarrow x \neq \frac{5}{3} \Rightarrow$ É.T.: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$.
$\log_9 |5-3x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_9 |5-3x| = \log_9 9^{\frac{1}{2}}$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $|5-3x| = 3$.
Az egyenlet megoldása $x_1 = \frac{2}{3}$ és $x_2 = \frac{8}{3}$, mindkét gyök eleme az értelmezési tartománynak, azaz megoldása az egyenletnek;

d. $2x + 3 > 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]-\frac{3}{2};\infty\right[$.
$\log_2 (2x + 3) = -1 \Rightarrow \log_2 (2x + 3) = \log_2 2^{-1}$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $2x + 3 = \frac{1}{2}$.
Az egyenlet megoldása $x = -\frac{5}{4} \in$ É.T., más megoldás nincs;

e. $x^2 - 6x + 8 > 0 \Rightarrow x < 2$ vagy $4 < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]-\infty;2\right[\cup \left]4;\infty\right[$.
(Megjegyzés: az É.T. meghatározása helyett a gyököket ellenőrizzük.)
$\log_3 (x^2 - 6x + 8) = 1 \Rightarrow \log_3 (x^2 - 6x + 8) = \log_3 3^1$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x^2 - 6x + 8 = 3$.
Az egyenlet megoldása $x_1 = 1$ és $x_2 = 5$, mindkét gyök eleme az értelmezési tartománynak, azaz megoldása az egyenletnek;

f. $\sqrt{5-3x} > 0 \Rightarrow x < \frac{5}{3} \Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]-\infty; \frac{5}{3}\right[$.

$\log_{81}\sqrt{5-3x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_{81}\sqrt{5-3x} = \log_{81} 81^{-\frac{1}{2}}$.

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $\sqrt{5-3x} = \frac{1}{9}$.

Az egyenlet megoldása $x = \frac{404}{243} \in$ É.T., más megoldás nincs;

g. $2x + 8 > 0 \Rightarrow -4 < x$ és $x + 1 > 0 \Rightarrow -1 < x$ és $x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ É.T.: $x \in]-1;0[\cup]0;\infty[$.
$\log_{x+1} (2x + 8) = 2 \Rightarrow \log_{x+1} (2x + 8) = \log_{x+1} (x + 1)^2$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $2x + 8 = (x + 1)^2$.
Az egyenlet megoldása $x_1 = -\sqrt{7} \notin$ É.T. és $x_2 = \sqrt{7} \in$ É.T., tehát a feladat megoldása $x = \sqrt{7}$;

h. Az É.T. meghatározása helyett a gyököket ellenőrizzük.
A logaritmus definícióját alkalmazzuk:

$$\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$$
$$\log_3 \log_4 x = 2^0$$
$$\log_4 x = 3^1$$
$$x = 4^3$$
$$x = 64.$$

Az ellenőrzést elvégezve megállapítható, hogy $x = 64$ valóban gyöke az egyenletnek.

18) Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait!

a. $x > 0 \Rightarrow$ É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$.
$\lg x = \lg 2 + \lg 6 \Rightarrow \lg x = \lg 2\cdot 6$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $x = 12$.
Az egyenlet megoldása $x = 12 \in$ É.T., más megoldás nincs;

b. $x > 0 \Rightarrow$ É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$.

$2 - \log_3 x = \log_3 2 + \log_3 4 + \log_3 5 \Rightarrow \log_3 \frac{3^2}{x} = \log_3 (2\cdot 4\cdot 5)$.

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $\frac{3^2}{x} = 40$.

Az egyenlet megoldása $x = \frac{9}{40} \in$ É.T., más megoldás nincs;

c. $x - 5 > 0 \Rightarrow 5 < x$ és $3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$ és $0 < x \Rightarrow$ É.T.={}, azaz az egyenlet egyetlen valós számra sem értelmezhető, megoldása nincs;

d. $x - 1 > 0 \Rightarrow 1 < x$ és $x + 1 > 0 \Rightarrow -1 < x$ és $x - 2 > 0 \Rightarrow 2 < x \Rightarrow$
$\Rightarrow$ É.T.: $x \in]2;\infty[$.
$\log_{11} (x - 1) + \log_{11} (x + 1) = \log_{11} (x - 2) + \log_{11} 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_{11} [(x - 1)(x + 1)] = \log_{11} [(x - 2)\cdot 8]$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $(x - 1)(x + 1) = (x - 2)\cdot 8$.
Az egyenlet megoldása $x_1 = 3$ és $x_2 = 5$, mindkét gyök eleme az értelmezési tartománynak, azaz megoldása az egyenletnek;

e. $x - 4 > 0 \Rightarrow 4 < x$ és $x + 3 > 0 \Rightarrow -3 < x$ és $5x + 4 > 0 \Rightarrow -\frac{4}{5} < x \Rightarrow$
$\Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]4;\infty\right[$.
$\lg(x-4) + \lg(x+3) = \lg(5x+4) \Rightarrow \lg[(x-4)(x+3)] = \lg(5x+4)$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $(x-4)(x+3) = 5x+4$.
Az egyenlet megoldása $x_1 = -2 \notin$ É.T. és $x_2 = 8 \in$ É.T., tehát a feladat megoldása $x = 8$;

f. $2x + 1 > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x$ és $x^2 + 8x + 16 > 0 \Rightarrow x \neq -4 \Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]-\frac{1}{2};\infty\right[$.
(Megjegyzés: az É.T. meghatározása helyett a gyököket ellenőrizzük.)
$2\cdot\log_5(2x+1) = \frac{1}{2}\cdot\log_5(x^2+8x+16) \Rightarrow \log_5(2x+1)^2 = \log_5\sqrt{x^2+8x+16}$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $(2x+1)^2 = \sqrt{x^2+8x+16}$.
Az egyenlet megoldása $x_1 = \frac{-3-\sqrt{57}}{8} \notin$ É.T. és $x_2 = \frac{-3+\sqrt{57}}{8} \in$ É.T., tehát a feladat megoldása $x = \frac{-3+\sqrt{57}}{8}$;

g. $\sqrt{5x-8} > 0 \Rightarrow \frac{8}{5} < x$ és $2x + 3 > 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]\frac{8}{5};\infty\right[$.
$\lg\sqrt{5x-8} + \frac{1}{2}\cdot\lg(2x+3) = \frac{1}{2}\cdot\lg 36 \Rightarrow \lg\sqrt{(5x-8)(2x+3)} = \lg\sqrt{36}$.
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $\sqrt{(5x-8)(2x+3)} = \sqrt{36}$.
Az egyenlet megoldása $x_1 = -\frac{12}{5} \notin$ É.T. és $x_2 = \frac{5}{2} \in$ É.T., tehát a feladat megoldása $x = \frac{5}{2}$;

h. $x + 3 > 0 \Rightarrow -3 < x$ és $\log_2(x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ és $x - 7 > 0 \Rightarrow 7 < x \Rightarrow$
$\Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]7;\infty\right[$.
$\frac{\log_2 1}{\log_2(x+3)} = \log_2(x-7) \Rightarrow 0 = \log_2(x-7)\cdot\log_2(x+3) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2(x-7) = 0 \Rightarrow x = 8 \in$ É.T.
vagy
$\Rightarrow \log_2(x+3) = 0 \Rightarrow x = -2 \notin$ É.T. (Megjegyzés: ezen eset vizsgálata szükségtelen, hiszen az É.T. miatt kizárt).
A feladat megoldása $x = 8$.

19) Használjuk fel, hogy $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $c \neq 1$.

a. $0 < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$.
$\log_2 x + \log_4 x = 3 \Rightarrow$
$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 3 \Rightarrow$
$2\cdot\log_2 x + \log_2 x = 6$.
Az egyenlet megoldása $x = 4 \in$ É.T., más megoldás nincs;

b. $x + 1 > 0 \Rightarrow -1 < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in]-1;\infty[$.
$\log_5 (x + 1) + \log_{25} (x + 1) = 1,5 \Rightarrow$
$\log_5 (x + 1) + \dfrac{\log_5(x+1)}{\log_5 25} = 1,5 \Rightarrow$
$2\cdot\log_5 (x + 1) + \log_5 (x + 1) = 3$.
Az egyenlet megoldása $x = 4 \in$ É.T., más megoldás nincs;

c. $0 < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$.
$\log_3 x - \log_{\sqrt{3}} x = 1 \Rightarrow$
$\dfrac{\log_{\sqrt{3}} x}{\log_{\sqrt{3}} 3} - \log_{\sqrt{3}} x = 1 \Rightarrow$
$\log_{\sqrt{3}} x - 2\cdot\log_{\sqrt{3}} x = 2$.
Az egyenlet megoldása $x = \dfrac{1}{3} \in$ É.T., más megoldás nincs;

d. $0 < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in \mathbb{R}^+$.
$\log_{\frac{1}{8}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 3 \Rightarrow$
$\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}} + \log_{\frac{1}{2}} x = 3 \Rightarrow$
$\log_{\frac{1}{2}} x + 3\cdot\log_{\frac{1}{2}} x = 9$.
Az egyenlet megoldása $x = \dfrac{1}{512} \in$ É.T., más megoldás nincs;

e. $x - 3 > 0 \Rightarrow 3 < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in]3;\infty[$.
$\log_5 (x - 3) + \log_{25} (x - 3) + \log_{625} (x - 3) = 7 \Rightarrow$
$\log_5 (x - 3) + \dfrac{\log_5(x-3)}{\log_5 25} + \dfrac{\log_5(x-3)}{\log_5 625} = 7 \Rightarrow$
$4\cdot\log_5 (x - 3) + 2\cdot\log_5 (x - 3) + \log_5 (x - 3) = 28$.
Az egyenlet megoldása $x = 628 \in$ É.T., más megoldás nincs;

f. $2x + 1 > 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in]-\dfrac{1}{2};\infty[$.
$\log_9 (2x + 1) - \log_{27} (2x + 1) = 1 \Rightarrow$
$\dfrac{\log_3(2x+3)}{\log_3 9} - \dfrac{\log_3(2x+3)}{\log_3 27} = 1 \Rightarrow$
$3\cdot\log_3 (2x + 1) - 2\cdot\log_3 (2x + 1) = 6$.
Az egyenlet megoldása $x = 364 \in$ É.T., más megoldás nincs;

g. $x > 0$ és $x \neq 1 \Rightarrow$ É.T.: $x \in]0;1[\cup]1;\infty[$.
$\log_x 3 + \log_3 x = 2 \Rightarrow$
$\dfrac{\log_3 3}{\log_3 x} + \log_3 x = 2 \Rightarrow$
$1 + (\log_3 x)^2 = 2\cdot\log_3 x$.
Vezessünk be új ismeretlent: $a = \log_3 x$.
Így az egyenlet $1 + a^2 = 2\cdot a \Rightarrow a = 1$.

$\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$.
Az egyenlet megoldása $x = 3 \in$ É.T., más megoldás nincs.

20)

a. $x + 3 > 0 \Rightarrow -3 < x$ és $2x + 1 > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]-\frac{1}{2};\infty\right[$.
A 7 alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növő, ezért:
$x + 3 > 2x + 1$.
Az egyenlőtlenség megoldása: $x < 2$.
Az értelmezési tartománnyal összevetve $x \in \left]-\frac{1}{2};2\right[$;

b. $2x - 5 > 0 \Rightarrow \frac{5}{2} < x$ és $6 - x > 0$ $x < 6 \Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]\frac{5}{2};6\right[$.
Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmus függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért:
$2x - 5 \le 6 - x$;
Az egyenlőtlenség megoldása: $x \le \frac{11}{3}$.
Az értelmezési tartománnyal összevetve $x \in \left]\frac{5}{2};\frac{11}{3}\right]$;

c. $7 + x > 0 \Rightarrow -7 < x$ és $x - 3 > 0 \Rightarrow 3 < x$ és $2x + 3 > 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} < x \Rightarrow$
$\Rightarrow$ É.T.: $x \in]3;\infty[$.
$\log_3 (7 + x) + \log_3 (x - 3) \le \log_3 (2x + 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3 [(7 + x)\cdot(x - 3)] \le \log_3 (2x + 3)$.
A 3 alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növő, ezért:
$(7 + x)\cdot(x - 3) \le (2x + 3)$.
Az egyenlőtlenség megoldása: $-6 \le x \le 4$.
Az értelmezési tartománnyal összevetve $x \in]3;4]$;

d. $7x - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{7} < x \Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]\frac{1}{7};\infty\right[$.
$\log_{27} (7x - 1) < \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{27} (7x - 1) < \log_{27} 3$.
A 27 alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növő, ezért: $7x - 1 < 3$.
Az egyenlőtlenség megoldása: $x < \frac{4}{7}$.
Az értelmezési tartománnyal összevetve $x \in \left]\frac{1}{7};\frac{4}{7}\right[$;

e. $\frac{3-x}{2x+1} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 3 \Rightarrow$ É.T.: $x \in \left]-\frac{1}{2};3\right[$.
(Megjegyzés: az É.T. meghatározása helyett választható a gyökök ellenőrzése.)
$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3-x}{2x+1} < 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \frac{3-x}{2x+1} < \log_{\frac{1}{3}} 1$.
Az $\frac{1}{3}$ alapú logaritmus függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért:

$\frac{3-x}{2x+1} > 1.$

Az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$.

Az értelmezési tartománnyal összevetve $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right[$.

21)

a. $200000 \cdot 1{,}06^{n} \geq 350000$

$1{,}06^{n} \geq 1{,}75$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$\lg 1{,}06^{n} \geq \lg 1{,}75 \Rightarrow n \geq \frac{\lg 1{,}75}{\lg 1{,}06}$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $n \geq 9{,}6$.

Legalább 10 évnek kell eltelnie, hogy 350000 forintunk legyen;

b. $140000 \cdot 0{,}9^{n} \leq 140000 \cdot 0{,}6$

$0{,}9^{n} \leq 0{,}6$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$\lg 0{,}9^{n} \leq \lg 0{,}6 \Rightarrow n \geq \frac{\lg 0{,}6}{\lg 0{,}9}$ (negatív számmal osztottunk!).

Az egyenlőtlenség megoldása: $n \geq 4{,}8$.

Legalább 5 évnek kell eltelnie, hogy a gép értéke az új árának 60 %-át érje.