Nagy András

Feladatok a koordináta-geometria, egyenesek témaköréhez
11. osztály

2010.

Feladatok a koordináta-geometria, egyenesek témaköréhez – 11. osztály

1) Döntsd el, hogy a *P* pont illeszkedik-e az *e* egyenesre (eleme-e az egyenesnek?)!
   a) e: $2x - 7y = 8$ és $P(11;2)$;
   b) e: $-7x - 6y + 1 = 0$ és $P(2;-2)$;
   c) e: $\frac{2}{3}x = 5 + y$ és $P(9;1)$;
   d) e: $5x - 3 = 0$ és $P(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$;
   e) e: $3x - 4y = -210$ és $P(2;54)$.

2) Az adott *e* egyenesre illeszkedik a *Q* pont. Határozd meg a hiányzó koordinátákat!
   a) e: $3x + 5y = 31$ és $Q(2;y)$;
   b) e: $2x - 3y = 36$ és $Q(-357;y)$;
   c) e: $2y = 8x - 50$ és $Q(x;2)$;
   d) e: $\frac{3}{7}x - 2 = 5y$ és $Q(x;-11)$;
   e) e: $5x + y = 14$ és $Q(p;2p)$.

3) A táblázat egy-egy sora egy-egy egyenest meghatározó adatokat tartalmaz (***n*** normálvektor, ***v*** irányvektor, ***m*** iránytangens vagy meredekség és ***α*** irányszög). Számítsd ki a hiányzó adatokat!

	n	***v***	***m***	***α***
e			**2**	
f		**(5;3)**		
g				**56,31°**
h	**(4;3)**			
i	**(7;0)**			

4) Határozd meg az egyenesek normálvektorát, irányvektorát, iránytényezőjét és irányszögét!
   a) e: $2x - 7y = 8$;
   b) f: $x = 8$;
   c) g: $3y = 8 - x$;
   d) h: $y + 5 = 0$;
   e) i: $4x - 11 = 3y$.

5) Írd fel a P_0 pontra illeszkedő, $\underline{n}$ normálvektorú egyenes egyenletét, ha
   a) $\underline{n}(2;5)$ és $P_0(-1;7)$;
   b) $\underline{n}(1;1)$ és $P_0(0;0)$;
   c) $\underline{n}(\frac{2}{7};5)$ és $P_0(2;-3)$;
   d) $\underline{n}(0;7)$ és $P_0(5;11)$;
   e) $\underline{n}(2;0)$ és $P_0(0;1)$;

f) $\underline{n}(-3;3)$ és $P_0(5;0)$;
g) $\underline{n}(2;\sqrt{5})$ és $P_0(1;0)$.

6) Írd fel a P_0 pontra illeszkedő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes egyenletét, ha
a) $\underline{v}(2;5)$ és $P_0(1;-5)$;
b) $\underline{v}(1;1)$ és $P_0(2;5)$;
c) $\underline{v}(5;-\frac{4}{3})$ és $P_0(2;7)$;
d) $\underline{v}(0;-3)$ és $P_0(13;2)$;
e) $\underline{v}(2;0)$ és $P_0(2;0)$;
f) $\underline{v}(1;1)$ és $P_0(0;0)$;
g) $\underline{v}(\sqrt{3};1)$ és $P_0(2;\sqrt{27})$.

7) Írd fel a P_0 pontra illeszkedő, m iránytangensű egyenes egyenletét, ha
a) $m = 1$ és $P_0(-4;9)$;
b) $m = -3$ és $P_0(0;0)$;
c) $m = 2$ és $P_0(2;7)$;
d) $m = \frac{2}{3}$ és $P_0(1;-5)$;
e) $m = 0$ és $P_0(-3;0)$.

8) Írd fel a P_0 pontra illeszkedő, α irányszögű egyenes egyenletét, ha
a) $\alpha = 30°$ és $P_0(-1;-2)$;
b) $\alpha = 0°$ és $P_0(3;7)$;
c) $\alpha = 90°$ és $P_0(-5;1)$;
d) $\alpha = -19{,}29°$ és $P_0(1;-5)$;
e) $\alpha = 90°$és $P_0(0;11)$.

9) Írd fel az A és B pontokra illeszkedő egyenes egyenletét, ha
a) $A(-4;-2)$ és $B(2;1)$;
b) $A(-3;2)$ és $B(6;-3)$;
c) $A(0;0)$ és $B(4;4)$;
d) $A(-7;1)$ és $B(6;1)$;
e) $A(4;-41)$ és $B(4;3)$.

10) Vizsgáld meg, hogy a megadott három pont egy egyenesre illeszkedik-e!
a) $P(-4;1)$, $Q(2;-1)$ és $R(14;-5)$;
b) $P(1;0)$, $Q(11;-1)$ és $R(33;-3)$;
c) $P(1;3)$, $Q(-2;-6)$ és $R(0;0)$;
d) $P\left(\frac{1}{2};3\right)$, $Q\left(-4;\frac{2}{3}\right)$ és $R(-13;-4)$.

11) Írd fel az e egyenessel párhuzamos és a P pontra illeszkedő g egyenes egyenletét, ha
a) e: $2x - 4y = 5$ és $P(-4;-1)$;
b) e: $5x + 7y = 18$ és $P(12;-6)$;
c) e: $2x = 3$ és $P\left(\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right)$;
d) e: $y = 5x - 3$ és $P(5;1)$.

12) Írd fel az f egyenesre merőleges g egyenes egyenletét, amely illeszkedik a Q pontra, ha
  a) f: $-3x + 8y = 17$ és $Q(-2;5)$;
  b) f: $x = 4$ és $Q(1;6)$;
  c) f: $5x + 3y = 4$ és $Q(4;5)$;
  d) f: $x = 4y$ és $Q(-2;8)$.

13) Hol helyezkednek el az A és B pontoktól egyenlő távolságra lévő pontok, ha
  a) $A(2;6)$ és $B(-5;3)$;
  b) $A(2;7)$ és $B(2;-7)$;
  c) $A(2;5)$ és $B(5,2)$;
  d) $A(3;-2)$ és $B(-1;4)$;
  e) $A(3;-2)$ és $B(-3;-2)$.

14) Az alábbi egyenesek közül melyik párhuzamos az g: $3x + 8y - 31 = 0$ egyenessel, illetve melyik merőleges rá?
  a) a: $-8x + 3y = 40$;
  b) b: $y = \frac{8}{3}x - \frac{14}{3}$;
  c) c: $3x + 8y = 11$;
  d) d: $2x - y = -8$;
  e) e: $3(x - 10) = 1 - 8y$
  f) f: $6x - 14 = -16y$.

15) Határozd meg az alábbi egyenesek és a koordináta tengelyek metszéspontjait!
  a) e: $2x + 5 = 0$;
  b) f: $3x - 7 = 2y$;
  c) g: $x + y = 0$;
  d) h: $y = 4 - 3x$;
  e) j: $y = 3 - x$.

16) Határozd meg az alábbi egyenesek metszéspontjait!
  a) e: $4x + 3y = 17$ és f: $2x - 7y = -17$;
  b) e: $5x + 3y = 25$ és f: $x - 6y = 5$;
  c) e: $x - 4y = -18$ és f: $-x + 3y = 14$;
  d) e: $3x + 4y = 10$ és f: $y = 6{,}5 - 0{,}75x$;
  e) e: $2x - 5y = -24$ és f: $2(x + 12) = 5y$.

17) Keresd meg azokat a pontokat, melyek egyenlő távolságra vannak az A, B és C pontoktól, ha
  a) $A(3;3)$, $B(0;-6)$, és $C(8;-2)$;
  b) $A(2;7)$, $B(6;6)$, és $C(14;4)$;
  c) $A(3;4)$, $B(9;2)$, és $C(1;-2)$;
  d) $A(-2;1)$, $B(8;3)$, és $C(2;-3)$.

18) E háromszög oldalainak felezőpontjai $P(3;-5)$, $Q(5;-2)$ és $R(1;-1)$. Írd fel a háromszög oldalegyeneseinek és oldalfelező merőlegeseinek egyenleteit!

19) Adott az $A(5;-3)$, $B(-1;1)$ és $C(6;3)$ pont. Írd fel az ABC háromszög
  a) b oldal egyenesének egyenletét;
  b) m_b magasságának egyenletét;

c) s_a súlyvonal egyenesének egyenletét;
d) c oldal felezőmerőlegesének egyenletét!

20) Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az e: $2x - 3y = 11$ és az f: $x + 5y = 12$ egyenesek metszéspontján és
a) párhuzamos a g: $2x + 5y = 1$ egyenessel;
b) merőleges a h: $3x - 4y = -13$ egyenesre.

21) Egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai $A(2;-3)$ és $B(7;-2)$. Határozd meg harmadik csúcsának koordinátáit, amely illeszkedik az e egyenesre, ha
a) e: $x - y = -2$;
b) e: $5x + y - 9 = 0$;
c) e: $y = 20 - 5x$;
d) e: $x - 5y = 17$;
e) e: $y = 2x - 15$.

22) Határozd meg az a egyenes és a P pont távolságát, ha
a) a: $4x - 3y = 2$ és $P(5;1)$;
b) a: $x + 2y = -3$ és $P(1;-2)$;
c) a: $6x - 8y = 11$ és $P(-2;-1)$;
d) a: $12x - 5y = 77$ és $P(-6;4)$;
e) a: $3x + 5y = -5$ és $P(3;4)$.

23) Határozd meg az a és b egyenesek távolságát, ha
a) a: $6x + 2y = 7$ és b: $\frac{7}{2} - y = 3x$;
b) a: $y = 3$ és b: $y = -1$;
c) a: $3x - 4y = -25$ és b: $6x = 8y + 100$;
d) a: $3x - 5y = 13$ és b: $5x + 3y = 2$;
e) a: $3x + y = 8$ és b: $3x + y - 18 = 0$;
f) a: $6x - 8y = 21$ és b: $-3x + 4y = 2$.

24) Határozd meg az egyenesek hajlásszögét, ha
a) e: $3x + 4y = 0$ és f: $5x - 2y = 1$;
b) e: $6x - 3y = 8$ és f: $y = 2x - 3$;
c) e: $3x + y = 12$ és f: $x + 2y = 1$;
d) e: $7x - 3y = 5$ és f: $3x + 7y = -2$;
e) e: $y = 3$ és f: $\sqrt{3}x - y = 4$;
f) e: $3x - 4y = -15$ és f: $x + 10y = 14$.

25) Egy négyzet két oldalegyenesének egyenlete $3x + 2y = 12$ és $3x + 2y = -1$. Határozd meg a négyzet kerületét, területét és átlójának hosszát!

26) A Q pontot tükrözzük az e egyenesre. Határozd meg a tükörkép koordinátáit, ha
a) e: $-x + 5y = 3$ és $Q(2;1)$;
b) e: $2x = 5y$ és $Q(-2;5)$;
c) e: $7x - 11y = 31$ és $Q\left(5;-\frac{7}{2}\right)$;
d) e: $y = 2$ és $Q(-1;-2)$.

Megoldások

1) Helyettesítsük be a pont koordinátáit az egyenes egyenletébe!
   a. igen, mert $2 \cdot 11 - 7 \cdot 2 = 8$;
   b. nem, mert $-7 \cdot 2 - 6 \cdot (-2) + 1 \neq 0$;
   c. igen, mert $\frac{2}{3} \cdot 9 = 5 + 1$;
   d. nem, mert $5 \cdot \frac{1}{2} - 3 \neq 0$;
   e. igen, mert $3 \cdot 2 - 4 \cdot 54 = -210$.

2) A pont koordinátáit az egyenes egyenletébe behelyettesítve a kapott egyenletet megoldjuk.
   a. $y = 5$, így $Q(2;5)$;
   b. $y = -250$, így $Q(-357;-250)$;
   c. $x = \frac{27}{4}$, így $Q\left(\frac{27}{4};2\right)$;
   d. $x = -\frac{371}{3}$, így $Q\left(-\frac{371}{3};-11\right)$;
   e. $p = 2$, így $Q(2;4)$.

3) Használjuk a következő összefüggéseket:

$$\underline{n} = (A;B) \Rightarrow \underline{v} = (-B;A) \text{ és } \underline{v} = (v_1;v_2) \Rightarrow \underline{n} = (-v_2;v_1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = m = \frac{v_2}{v_1} = -\frac{A}{B}$$

	$\underline{n}$	$\underline{v}$	m	α
e	(2;-1)	(1;2)	**2**	63,43°
f	(-3;5)	**(5;3)**	$\frac{3}{5}$	30,96°
g	(3;-2)	(2;3)	1,5	**56,31°**
h	**(4;3)**	(-3;4)	$-\frac{4}{3}$	-53,13°
i	**(7;0)**	(0;7)	**—**	90°

4) Rendezzük az egyenes egyenletét $Ax + By = C$ alakba és olvassuk le az egyenes normálvektorának koordinátáit.
   a. $\underline{n}_e = (2;-7)$, $\underline{v}_e = (7;2)$, $m = \frac{2}{7}$ és $\alpha \approx 15,95°$;
   b. $\underline{n}_f = (1;0)$, $\underline{v}_f = (0;1)$, m nincs (mert tg 90° nem értelmezett) és $\alpha = 90°$;
   c. $\underline{n}_g = (1;3)$, $\underline{v}_g = (3;-1)$, $m = -\frac{1}{3}$ és $\alpha \approx -18,43°$;
   d. $\underline{n}_h = (0;1)$, $\underline{v}_h = (1;0)$, $m = 0$ és $\alpha = 0°$;
   e. $\underline{n}_i = (4;-3)$, $\underline{v}_i = (3;4)$, $m = \frac{4}{3}$ és $\alpha \approx 53,13°$.

5) Alkalmazzuk az egyenes normálvektoros egyenletét: $Ax + By = Ax_0 + By_0$.
   a. $3x + 5y = 33$;
   b. $x - y = 0$ (a koordináta-tengelyek szögfelező egyenese az első - harmadik negyedben);
   c. $2x + 35y = -101$;
   d. $y = 11$ (x tengellyel párhuzamos egyenes);
   e. $x = 0$ (az y tengely egyenlete);
   f. $x - y = 5$;
   g. $2x + \sqrt{5}\,y = 2$.

6) Alkalmazzuk az egyenes irányvektoros egyenletét: $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$,
vagy $\underline{v} = (v_1;v_2) \Rightarrow \underline{n} = (-v_2;v_1)$ segítségével írjuk fel a normálvektoros egyenletet.
   a. $5x - 2y = 15$;
   b. $x - y = -3$;
   c. $4x + 15y = 113$;
   d. $x = 13$ (y tengellyel párhuzamos egyenes);
   e. $y = 0$ (az x tengely egyenlete);
   f. $x - y = 0$ (a koordináta-tengelyek szögfelező egyenese az első - harmadik negyedben);
   g. $x - \sqrt{3}\,y = -7$.

7) Alkalmazzuk az egyenes iránytényezős egyenletét: $y = m(x - x_0) + y_0$, vagy $m = -\dfrac{A}{B}$ alapján írjuk fel a normálvektoros egyenletet.
   a. $x - y = -13$;
   b. $3x + y = 0$;
   c. $-2x + y = 3$;
   d. $2x - 3y = 17$;
   e. $y = 0$ (az x tengely egyenlete).

8) A tg $\alpha = m$ összefüggés alapján felírjuk az egyenes iránytényezős egyenletét:
$y = m(x - x_0) + y_0$, vagy $m = -\dfrac{A}{B}$ alapján írjuk fel a normálvektoros egyenletet.
   a. $\sqrt{3}\,x - 3y = 6 - \sqrt{3}$;
   b. $y = 7$;
   c. $x = -5$;
   d. $7x + 20y = -93$ ($m = \text{tg}\,(-19{,}29°) = -0{,}35 = -\dfrac{7}{20} \Rightarrow A = 7$ és $B = 20$);
   e. $x = 0$ (az y tengely egyenlete).

9) A két pont által meghatározott vektor az egyenes irányvektora: $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$.
   a. $\underline{v} = (6;3)$, $x - 2y = 0$;
   b. $\underline{v} = (9;-5)$, $5x + 9y = 3$;
   c. $\underline{v} = (4;4)$, $x - y = 0$ (a koordináta-tengelyek szögfelező egyenese az első - harmadik negyedben);
   d. $\underline{v} = (13;0)$, $y = 1$ (x tengellyel párhuzamos egyenes);
   e. $\underline{v} = (0;44)$, $x = 4$ (y tengellyel párhuzamos egyenes).

10) Írjuk fel valamelyik két ponton átmenő egyenes egyenletét és abba helyettesítsük be a harmadik pont koordinátáit.

a. a P és Q pontokra illeszkedő egyenes egyenlete: $x + 3y = -1$,
a három pont egy egyenesre illeszkedik (kollineáris pontok);
b. a P és Q pontokra illeszkedő egyenes egyenlete: $x + 10y = 1$,
a három pont nem illeszkedik egy egyenesre (nem kollineáris pontok);
c. a P és Q pontokra illeszkedő egyenes egyenlete: $3x - 3y = 0$,
a három pont egy egyenesre illeszkedik (kollineáris pontok);
d. a P és Q pontokra illeszkedő egyenes egyenlete: $14x - 27y = -74$,
a három pont egy egyenesre illeszkedik (kollineáris pontok).

11) Az e egyenes egyenletének $Ax + By = C$ alakjából olvassuk le normálvektorát. Az e egyenessel párhuzamos g egyenesnek is lehet ez a normálvektora.

a. $\underline{n}_e = (2;-4) = \underline{n}_g$, g: $x - 2y = -2$;
b. $\underline{n}_e = (5;7) = \underline{n}_g$, g: $5x + 7y = 18$, azaz $e \equiv g$, mert $P \in e$;
c. $\underline{n}_e = (2;0) = \underline{n}_g$, g: $x = \dfrac{2}{3}$;
d. $\underline{n}_e = (5;-1) = \underline{n}_g$, g: $5x - y = 24$.

12) Az f egyenes egyenletének $Ax + By = C$ alakjából olvassuk le normálvektorát. Az f egyenes normálvektora és a g egyenes irányvektora megegyezik.

a. $\underline{n}_f = (-3;8) = \underline{v}_g$, g: $8x + 3y = -1$;
b. $\underline{n}_f = (1;0) = \underline{v}_g$, g: $y = 6$;
c. $\underline{n}_f = (5;3) = \underline{v}_g$, g: $3x - 5y = -13$;
d. $\underline{n}_f = (1;-4) = \underline{v}_g$, g: $4x + y = 0$.

13) Az $\overline{AB}$ szakasz felezőmerőlegesének egyenletét keressük. Adott pontja a szakasz felezési pontja, normálvektora $\underline{n} = \overrightarrow{AB}$.

a. $\underline{n} = (-7;-3)$, $F_{AB} = \left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right)$, f: $7x + 3y = 3$;
b. $\underline{n} = (0;-14)$, $F_{AB} = (2;0)$, f: $y = 0$ (az x tengely egyenlete);
c. $\underline{n} = (3;-3)$, $F_{AB} = \left(\dfrac{7}{2};\dfrac{7}{2}\right)$, f: $x - y = 0$ (a koordináta-tengelyek szögfelező
egyenese az első - harmadik negyedben);
d. $\underline{n} = (-4;6)$, $F_{AB} = (1;1)$, f: $2x - 3y = -1$;
e. $\underline{n} = (-6;0)$, $F_{AB} = (0;-2)$, f: $x = 0$ (az y tengely egyenlete).

14) Írjuk fel az egyenesek normálvektorait! Ha $\underline{n}_a = \lambda \cdot \underline{n}_g$ ($\lambda \in R \setminus \{0\}$), akkor a két egyenes párhuzamos. Ha $\underline{n}_a \cdot \underline{n}_g = 0$, akkor a két egyenes egymásra merőleges.

a. $a \perp g$;
b. $b \perp g$;
c. $c \parallel g$, ($\lambda = 1$);
d. d nem párhuzamos a g egyenessel és nem merőleges a g egyenesre;
e. $e \equiv g$, tehát $e \parallel g$;
f. $f \parallel g$, ($\lambda = 2$).

15) Az x tengelyre illeszkedő pontok $P_x(x;0)$ alakúak. Helyettesítsük be az egyenes egyenletébe P_x koordinátáit és a kapott egyenlet megoldása a metszéspont abszcisszája. Az y tengelyre illeszkedő pontok $P_y(0;y)$ alakúak. Helyettesítsük be az egyenes egyenletébe P_y koordinátáit és a kapott egyenlet megoldása a metszéspont ordinátája.

a. $M_x = (-2{,}5;0)$ és M_y nincs, mert $e \parallel y$ tengely;
b. $M_x = \left(\frac{7}{3};0\right)$ és $M_y = \left(0;-\frac{7}{2}\right)$;
c. $M_x = M_y = (0;0)$;
d. $M_x = \left(\frac{4}{3};0\right)$ és $M_y = (0;4)$;
e. $M_x = (3;0)$ és $M_y = (0;3)$.

16) Oldjuk meg a két egyenes egyenletéből felírható egyenlet-rendszert!

a. $e \cap f = (2;3)$;
b. $e \cap f = (5;0)$;
c. $e \cap f = (-2;4)$;
d. $e \cap f = \{\}$, azaz a két egyenesnek nincs közös pontja, párhuzamosak;
e. $e \equiv f$, azaz minden pontjuk közös $\left(x;\frac{2x+24}{5}\right)$.

17) A keresett pont az A, B, C pontokra írható kör középpontja, ami a húrok felezőmerőlegeseinek metszéspontja.

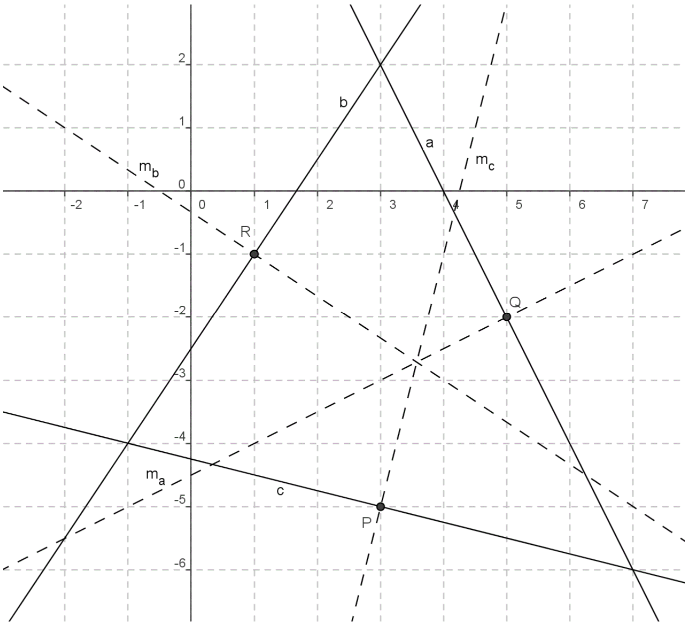
a. f_{AB}: $x + 3y = -3$ és f_{AC}: $-x + y = -5$, a keresett pont $K = (3;-2)$;
b. a keresett pont nem létezik, mert a három pont egy egyenesre illeszkedik;
c. f_{AB}: $-3x + y = -15$ és f_{AC}: $x + 3y = 5$, a keresett pont $K = (5;0)$;
d. f_{AB}: $5x + y = 17$ és f_{AC}: $x - y = 1$, a keresett pont $K = (3;2)$, az $\overline{AB}$ szakasz felezési pontja. A három pont derékszögű háromszöget határoz meg, melynek az $\overline{AB}$ szakasz az átfogója.

18) Használjuk fel, hogy a háromszög középvonala párhuzamos a nem metszett oldallal. Így $a \parallel PR$, tehát $\underline{v}_a = \overrightarrow{PR}$. Az oldalegyenesek egyenletei:

$\underline{v}_a = \overrightarrow{PR} = (-2;4)$, a: $2x + y = 8$;
$\underline{v}_a = \overrightarrow{PQ} = (2;3)$, b: $3x - 2y = 5$;
$\underline{v}_a = \overrightarrow{RQ} = (4;-1)$, c: $x + 4y = -17$.

Mivel az oldalfelező merőleges az oldallal párhuzamos középvonalra is merőleges, ezért $m_a \perp PR$, tehát $\underline{n}_{m_a} = \overrightarrow{PR}$. Az oldalfelező merőlegesek egyenletei:

m_a: $x - 2y = 9$;
m_b: $2x + 3y = -1$;
m_c: $4x - y = 17$.



18. feladat

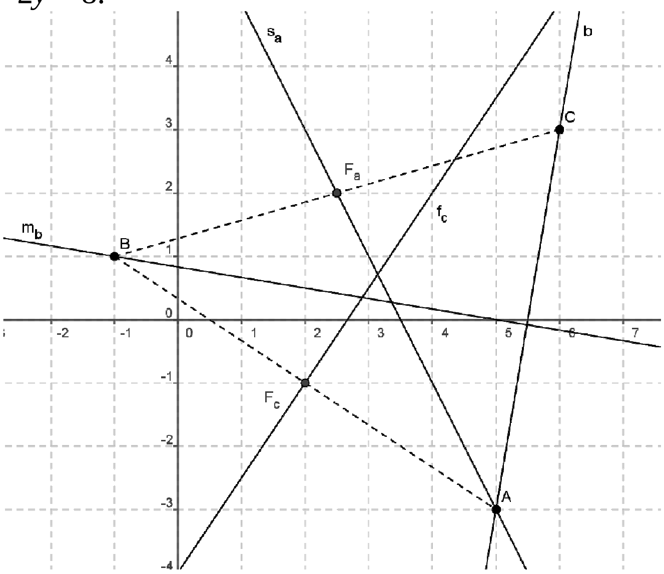
19)

a. A b oldal az A és C pontokra illeszkedő egyenes, $\underline{v}_b = (1;6)$, b: $6x - y = 33$;

b. Az m_b merőleges a b oldalra, azaz $\overrightarrow{AC}$ vektorra és illeszkedik B csúcsra, $\underline{n}_{m_b} = \overrightarrow{AC} = (1;6)$, m_b: $x + 6y = 5$;

c. Az s_a illeszkedik az A csúcsra és az a oldal felezési pontjára, ami a $\overline{BC}$ szakasz felezési pontja. $F_{BC} = \left(\frac{5}{2};2\right)$, $\underline{v}_{s_a} = \overrightarrow{F_{BC}A} = \left(\frac{5}{2};-5\right)$, s_a: $5x + 2{,}5y = 17{,}5$;

d. Az f_c merőleges a c oldalra, azaz az A és B pontokra illeszkedő egyenesre és illeszkedik az $\overline{AB}$ szakasz felezési pontjára. $\underline{n}_{f_c} = \overrightarrow{AB} = (-6;4)$, $F_{AB} = (2;-1)$, f_c: $3x - 2y = 8$.



19. feladat

20) $e \cap f$ = (7;1).

a. $\underline{n}_g = \underline{n}_{g'}$ = (2;5), $g \parallel g'$: 2x + 5y = 19;

b. $\underline{n}_h = \underline{v}_{h'}$ = (3;-4), $h \perp h'$: 4x + 3y = 31.

21) A háromszög harmadik csúcsa az $\overline{AB}$ szakasz felezőmerőlegesének és az adott egyenesnek a metszéspontja. $F_{AB} = \left(\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right)$, $\underline{n}_{f_{AB}} = \overrightarrow{AB}$ = (5;1), f_{AB}: 5x + y = 20.

a. a harmadik csúcs C(3;5);

b. nincs megoldás, mert e párhuzamos az $\overline{AB}$ szakasz felezőmerőlegesével;

c. az e egyenes az $\overline{AB}$ szakasz felezőmerőlegese, így az egyenes bármely pontja lehet a háromszög harmadik csúcsa, kivéve az $\overline{AB}$ szakasz felezési pontját, $F_{AB} = \left(\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right)$ pontot. $C(x;20-5x)$;

d. nincs megoldás, mert az e egyenes az AB alap egyenese;

e. a harmadik csúcs C(5;-5).

22) Írjuk fel a P pontra illeszkedő és az a egyenesre merőleges egyenes egyenletét, majd határozzuk meg metszéspontját az a egyenessel. A kapott pont és a P távolságát keressük. (Alkalmazhatjuk a $d = \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ összefüggést is, ahol az egyenes egyenlete $Ax + By + C = 0$ alakban, a pont $P(x;y)$ alakban adott.)

a. $a \perp g$: 3x + 4y = 19, $a \cap g$ = (2,6;2,8). Az a egyenes és a P pont távolsága 3 hosszúság egység;

b. $a \perp g$: 2x – y = 4, $a \cap g$ = (1;-2) = P, ezért az a egyenes és a P pont távolsága 0;

c. $a \perp g$: 4x + 3y = -11, $a \cap g$ = (-1,1;-2,2). Az a egyenes és a P pont távolsága $\frac{3}{2}$ hosszúság egység;

d. $a \perp g$: 5x + 12y = 18, $a \cap g$ = (6;-1). Az a egyenes és a P pont távolsága 13 hosszúság egység;

e. $a \perp g$: 5x – 3y = 3, $a \cap g$ = (0;-1)az a egyenes és a P pont távolsága $\sqrt{34} \approx 5{,}83$ hosszúság egység.

23) Írjuk fel az a és b egyenesekre merőleges egyenletét (célszerű az origón átmenő egyenes egyenletét felírni, ez legyen g), majd határozzuk meg metszéspontját az a és b egyenessel. A kapott metszéspontok távolságát keressük.

a. az a és b egyenesek távolsága 0, mert $a \equiv b$;

b. g: x = 0, azaz az y tengely, $A = g \cap a$ = (0;3), $B = g \cap b$ = (0;-1), $d_{AB} = \sqrt{0^2 + (-4)^2}$ = 4, tehát az a és b egyenesek távolsága 4 hosszúság egység;

c. g: 4x + 3y = 0, $A = g \cap a$ = (-3;4), $B = g \cap b$ = (6;-8), $d_{AB} = \sqrt{9^2 + (-12)^2}$ = 15, tehát az a és b egyenesek távolsága 15 hosszúság egység;

d. $\underline{n}_a = (3;-5) \neq \lambda \cdot \underline{n}_b = (5;3) \Rightarrow$ az egyenesek metszik egymást, ezért az a és b egyenesek távolsága 0,

e. g: $x - 3y = 0$, $A = g \cap a = (2{,}4;0{,}8)$, $B = g \cap b = (5{,}4;1{,}8)$,
$d_{AB} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, tehát az a és b egyenesek távolsága $\sqrt{10}$ hosszúság egység;

f. g: $4x + 3y = 0$, $A = g \cap a = (1{,}26;-1{,}68)$, $B = g \cap b = (-0{,}24;0{,}32)$,
$d_{AB} = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 2^2} = 2{,}5$, tehát az a és b egyenesek távolsága $\frac{5}{2}$ hosszúság egység.

24) Írjuk fel mindkét egyenes egy-egy normálvektorát. A normálvektorok hajlásszögéből meghatározható az egyenesek hajlásszöge. A két vektor szöge meghatározható a skaláris szorzat segítségével. (Alkalmazhatjuk a $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|$ összefüggést is, ahol az egyenesek egyenlete $Ax + By + C = 0$, alakban adott.)

a. $\underline{n}_e = (3;4)$, $\underline{n}_f = (5;-2)$
$\underline{n}_e \cdot \underline{n}_f = 7$, $|\underline{n}_e| = 5$, $|\underline{n}_f| = \sqrt{29}$, e és f szöge 74 °55'53'' ≈ 74,93°;

b. $\underline{n}_e = (6;-3) = 3 \cdot \underline{n}_f = (2;-1)$, azaz $\underline{n}_e \parallel \underline{n}_f \Rightarrow e \parallel f$, tehát szögük 0°;

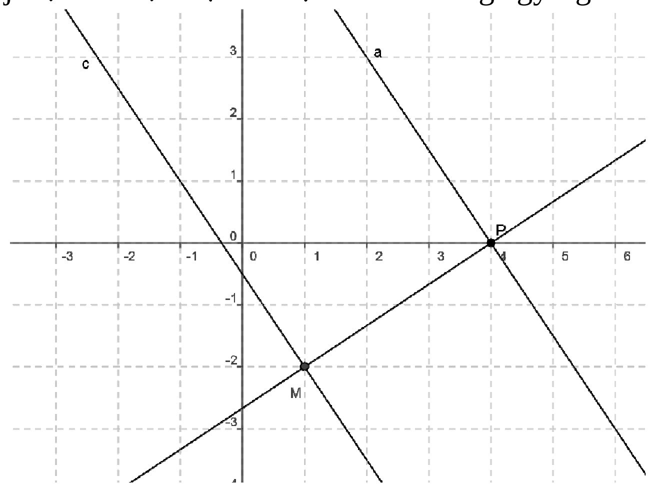
c. $\underline{n}_e = (3;1)$, $\underline{n}_f = (1;2)$
$\underline{n}_e \cdot \underline{n}_f = 5$, $|\underline{n}_e| = \sqrt{10}$, $|\underline{n}_f| = \sqrt{5}$, e és f szöge 45°;

d. $\underline{n}_e = (7;-3)$, $\underline{n}_f = (3;7)$
$\underline{n}_e \cdot \underline{n}_f = 0 \Rightarrow e \perp f$, tehát szögük 90°;

e. $\underline{n}_e = (0;1)$, $\underline{n}_f = (\sqrt{3};-1)$
$\underline{n}_e \cdot \underline{n}_f = -1$, $|\underline{n}_e| = 1$, $|\underline{n}_f| = \sqrt{4}$, e és f szöge 60°;

f. $\underline{n}_e = (3;4)$, $\underline{n}_f = (1;10)$
$\underline{n}_e \cdot \underline{n}_f = -37$, $|\underline{n}_e| = 5$, $|\underline{n}_f| = \sqrt{101}$, e és f szöge 42°34'50" ≈ 42,58°.

25) A négyzet oldalának hossza a két egyenes távolsága.
$P \in a$, $\underline{n}_a = (3;2) = \underline{v}_b$, b: $2x - 3y = 8$, $c \cap b = M = (1;-2)$, $d_{PM} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.
A négyzet oldalának hossza $\sqrt{13}$ hosszúság egység.
A négyzet kerülete $4a = 4\sqrt{13} = \sqrt{208}$ hosszúság egység;
A négyzet területe $a^2 = \sqrt{13}^2 = 13$ terület egység;
A négyzet átlója $\sqrt{2}\,a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{26}$ hosszúság egység.



25. feladat

26) Határozzuk meg a Q pontra illeszkedő és az e egyenesre merőleges egyenes egyenletét, majd ennek és az e egyenesnek metszéspontját, M pontot. Keressük a $\overline{QQ'}$ szakasz Q' pontjának koordinátáit, ha a szakasz felezési pontja M.

a. $Q' \equiv Q$, mert $Q \in e$;
b. $e \perp m$: $5x + 2y = 0$, $M = e \cap m = (0;0)$, $Q' = (2;-5)$, a Q pont e egyenesre vonatkozó tükrözése ebben az esetben megegyezik az origóra vonatkozó tükrözéssel;
c. $e \perp m$: $11x + 7y = 30{,}5$, $M = e \cap m = \left(\frac{13}{4};-\frac{3}{4}\right)$, $Q' = \left(\frac{3}{2};2\right)$;
d. $e \perp m$: $x = -1$, $M = e \cap m = (-1;2)$, $Q' = (-1;6)$.