ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2006. május 9.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
- **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
- Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **csak egy** (a magasabb pontszámú) **értékelhető**.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
A legkisebb szög: 20°.	2 pont	*A szögösszeg megjelenítéséért már jár 1 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
A sorozat negyedik eleme: 6.	2 pont	*A megfelelő képlet felírása 1 pontot ér.*
Összesen:	**2 pont**	

3.		
A két szám egyenlő. ($7 \cdot 13 = 91$).	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
$\frac{9,8}{7} = 1,4\,(^{o}C)$	2 pont	*A fogalom helyes használata melletti számolási hiba esetén 1 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
20	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
$V = 42 \cdot 25 \cdot 30\ (= 31\,500\ cm^3 = 31,5\ dm^3) = 31,5\ liter$.	2 pont	*Ha a mértékegység átváltása hiányzik, vagy nem áttekinthető, maximum 1 pont adható.*
Az akvárium nem telik meg.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7.		
b)	1 pont	*Ha az a)-t is kiválasztja, maximum 1 pont adható.*
c)	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

8.		
156 000 Ft-ot vehet fel Péter egy év elteltével.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9.		
Mind a négy ember maximum három levelet írhatott egy héten (4·3).	2 pont	
12 vagy b)	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
$4x + 5y = -13$	3 pont	*A jól leolvasott normálvektor vagy irányvektor 1 pont; a pont jó behelyettesítése 2 pont.*
Összesen:	**3 pont**	

11.		
Számolásos indoklás vagy helyes Venn-diagram $(6+8)-10=4$	2 pont	
Mindkét nyelvet 4 fő beszéli.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
f legkisebb értéke: –3,	1 pont	
ez az $x = 2$ értékhez tartozik.	1 pont	
f legnagyobb értéke: 7,	1 pont	
ez az $x = 6$ értékhez tartozik.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Ha a jó tartalmat hibásan, pl. rendezett számpárokkal fejezi ki, 2 pont adható.*

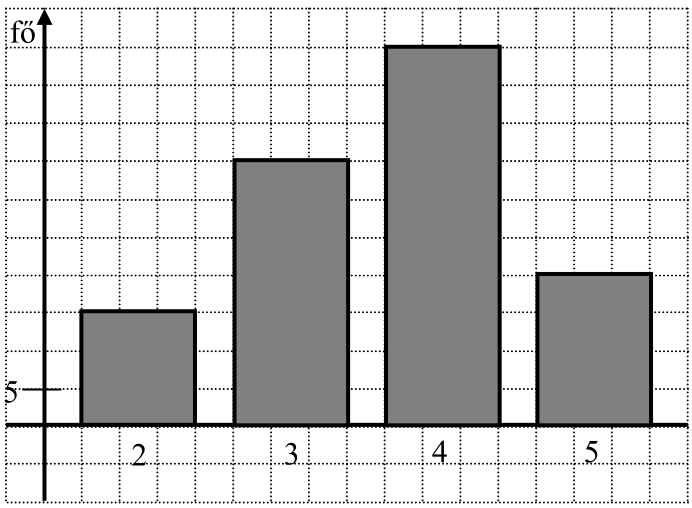
II./A

13. a)		
Az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani.	1 pont	*Az új változó bevezetése nélkül is jár a pont.*
Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1 = 3$ *és* $a_2 = -1$.	1 pont	
$a = 3^x = 3$ esetén, $x = 1$.	1 pont	
$a = 3^x = -1$ egyenlet nem ad megoldást,	1 pont	
mert 3 minden valós kitevőjű hatványa pozitív szám.	1 pont	
Az $x = 1$ kielégíti az eredeti egyenletet.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

13. b)		
Az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani. Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1 = 3$ *és* $a_2 = -1$.	1 pont*	
$a = \sin x = 3$ nem ad megoldást,	1 pont	
mert $\sin x \le 1$.	1 pont	
$a = \sin x = -1$. A $\sin x = -1$ egyenlet gyökei: az $x = \frac{3}{2} \cdot \pi + 2k \cdot \pi$, ahol k tetszőleges egész szám.	2 pont	*Az egyenlet gyökének elfogadható a fokokban megadott helyes alakja is:* $x = \frac{3}{2} \cdot \pi + 2k \cdot \pi =$ $= 270° + k \cdot 360°$ *Ha a gyök megadásánál hiányzik a periódus, 1 pont adható. Ha vegyesen használ fokot és ívmértéket, akkor is 1 pont jár.*
Ezek az x értékek kielégítik az eredeti egyenletet.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
** Ha az első egyenletben ezért a részletért nem kaphatott pontot, akkor itt 2 pont adható.*		

14.		
Az a oldalú szabályos háromszög magassága: $\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}=4\cdot\sqrt{3}$.	1 pont	*Az 1 pont akkor is jár, ha közvetlenül a területképletet írja fel helyesen.*
Az alaplap területe: $\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}=16\cdot\sqrt{3}$ (cm^2).	2 pont	
A palást területe: $3\ am_t = 24\ m_t$	2 pont	
$24\ m_t = 6\cdot16\cdot\sqrt{3}$ $m_t = 4\cdot\sqrt{3}$	2 pont	
$V_{hasáb} = (T_a\cdot m_t =)\ 16\cdot\sqrt{3}\cdot4\cdot\sqrt{3} = 192$ (cm^3)	2 pont	
$A_{hasáb} = 2\ T_a + 3\ a\cdot m_t$	1 pont	*Akkor is jár az 1 pont, ha közvetlenül a képletbe jól behelyettesítve írja fel a felszínt.*
$A_{hasáb} = 2\cdot16\cdot\sqrt{3}+24\cdot4\cdot\sqrt{3} = 128\cdot\sqrt{3}\approx221{,}7$ (cm^2)	2 pont	
Összesen:	**12 pont**	*Következetesen alkalmazott kerekítések esetén teljes pontszám jár.*

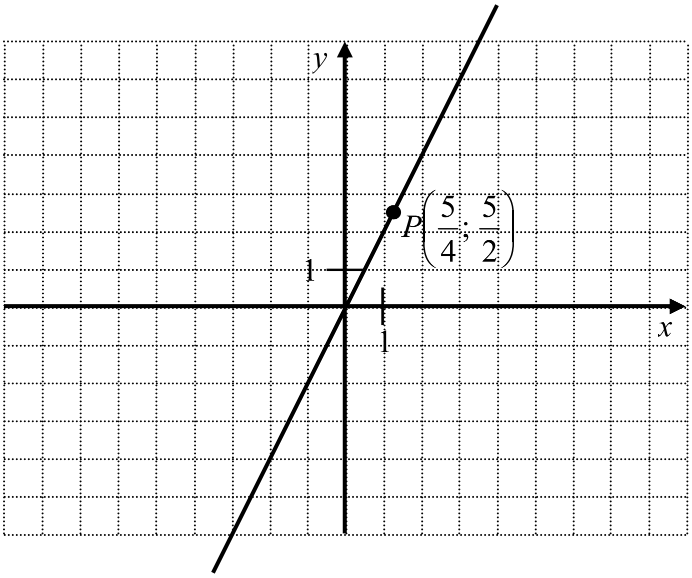
15. a)		
Az összes képezhető kódok száma 5!	2 pont	
120 tanuló írt dolgozatot.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. b)		
jegyek: 2, 3, 4, 5 fok: 45°, 105°, 150°, 60° fő: 15, 35, 50, 20	4 pont	*Adatokat tartalmazó oszloponként 1-1 pont. Ha a tanulói létszámokat kerekítés után adja meg helyesen, 2 pontot kaphat.*
	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

jegyek	2	3	4	5
fok	45°	105°	150°	60°
fő	15	35	50	20

15. c)		
A 4-es és az 5-ös dolgozatok száma összesen: 70.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{70}{120} = \frac{7}{12} \approx 0{,}583$.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II./B

16. a)		
	2 pont	*Ha az (1)-nek megfelelő tartományon ábrázol, 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	

16. b)		
Az (1) egyenlet miatt $y > -1$	1 pont	
és $x > -11$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

16. c)		
$\lg(y+1)^2 = \lg(x+11)$	1 pont	
$\lg(2x+1)^2 = \lg(x+11)$	1 pont	
A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt	1 pont	
$(2x+1)^2 = x+11$	1 pont	
$4x^2 + 3x - 10 = 0$	2 pont	
$x_1 = \frac{5}{4}$ és $x_2 = -2$	1 pont	
$y_1 = \frac{5}{2}$ és $y_2 = -4$	1 pont	
A másodfokú egyenletrendszer megoldásai: $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{2}\right)$ illetve (–2, –4),	1 pont	
amiből a második számpár nem tartozik az eredeti egyenlet értelmezési tartományába,	1 pont	
az első számpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

16. d)

A $P\left(\frac{5}{4};\frac{5}{2}\right)$ pont bejelölése.	2 pont	*Ha a c) részre adott válaszát jól ábrázolja, akkor jár a 2 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

17. a)

<table>
<tr><td colspan="3">1. megoldás</td></tr>
<tr><td>Foglaljuk táblázatba az egyes fordulókban megtett tételeket és a nyereményeket
<table>
<tr><th>forduló</th><th>tét</th><th>a forduló végén visszakapott pénz</th><th>összes pénz a forduló végén</th></tr>
<tr><td>1.</td><td></td><td>40 000.-</td><td>40 000.-</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>40 000.-</td><td>80 000.-</td><td>80 000.-</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>80 000.-</td><td>160 000.-</td><td>160 000.-</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>160 000.-</td><td>320 000.-</td><td>320 000.-</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>320 000.-</td><td>640 000.-</td><td>640 000.-</td></tr>
</table>
A bátor versenyző 640 000 Ft-ot nyerhet, ha minden fordulóban jól válaszol.</td><td>4 pont</td><td>2. fordulótól soronként 1-1 pont. Bármilyen logikusan felépített, helyes megjelenítés elfogadható.</td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>4 pont</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">2. megoldás</td></tr>
<tr><td>Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy fordulóban a pénze mindig megduplázódik, így a végén $40\ 000\cdot 2^4 = 640\ 000$ forint a nyeremény.</td><td>4 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>4 pont</td><td></td></tr>
</table>

17. b)

1. megoldás

forduló	tét	a forduló végén visszakapott pénz	összes pénz a forduló végén
1.		40 000.-	40 000.-
2.	20 000.-	40 000.-	60 000.-
3.	30 000.-	60 000.-	90 000.-
4.	45 000.-	90 000.-	135 000.-
5.	67 500.-	135 000.-	202 500.-

Az óvatos versenyző 202 500 Ft-ot nyerhet, ha minden fordulóban jól válaszol.

4 pont

2. fordulótól soronként 1-1 pont. Bármilyen logikusan felépített, helyes megjelenítés elfogadható.

Összesen: 4 pont

2. megoldás

Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy fordulóban a pénze mindig másfélszereződik, így a végén $40\,000 \cdot 1{,}5^4 = 202\,500$ forint a nyeremény. — 4 pont

Összesen: 4 pont

17. c)

1. megoldás

forduló	tét	a forduló végén visszakapott pénz	összes pénz a forduló végén
1.		40 000.-	40 000.-
2.	40 000.-	80 000.-	80 000.-
3.	60 000.-	120 000.-	140 000.-
4.	105 000.-	210 000.-	245 000.-
5.	183 750.-	0	61 250.-

A versenyző 61 250 Ft-ot nyerhet.

5 pont

2. fordulótól soronként 1-1 pont. Bármilyen logikusan felépített, helyes megjelenítés elfogadható.

Összesen: 5 pont

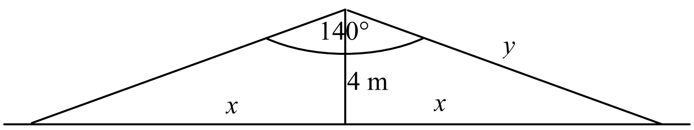
2. megoldás

Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy forduló végére $40\,000 \cdot 2^1 \cdot 1{,}75^2 \cdot 0{,}25 = 61250$ forint a nyeremény. — 5 pont

Összesen: 5 pont

17. d)		
1. megoldás		
A kockáztatás 4 fordulón keresztül történik, és a játékos minden fordulóban $\frac{1}{3}$ valószínűséggel vállal 100%-ot.	1 pont	
A maximális nyereményhez jutás valószínűsége: $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \approx 0{,}012$.	3 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. megoldás		
Az összes esetek száma a 4 utolsó fordulóban $3^4 = 81$.	2 pont	
A kedvező esetek száma 1.	1 pont	
A keresett valószínűség (a klasszikus modell szerint): $\frac{1}{81} \approx 0{,}012$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
Megjegyzés: Ha a vizsgázó a leírt játékszabályokat nem jól értelmezi (pl. a feltett pénzt nem kiadásként kezeli), és a saját modelljében újabb hibát nem követ el, az a) kérdésre járó 4 pontot nem kaphatja meg. Megoldása így legfeljebb 13 pontot ér.		

18. a)		
A feladat megértését tükröző helyes ábra. 	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

18. b)		
$y = \frac{4}{\cos 70°}$	3 pont	
$\approx 11{,}7$ (m)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. c)		
A legtávolabbi megvilágított pont a talajon a rúd aljától: $x = 4 \cdot tg\ 70^\circ$ távolságra van,	2 pont	
$x \approx 11\ (m)$,	1 pont	
így a 15 méterre levő pont már nincs megvilágítva.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. d)		
$r^2\pi \le 100$	1 pont	
$r \le \sqrt{\frac{100}{\pi}} \approx 5{,}64\ (m)$,	2 pont	
$h \le \frac{5{,}64}{tg\ 70^\circ} \approx 2{,}05\ (m)$,	2 pont	
tehát az első vagy a második kampóra kell akasztani az érzékelőt.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	*Egyenlettel számolva is járnak a pontok.*